ANALISIS METODE ELIMINASI GAUSS DAN ATURAN CRAMER DALAM MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR SERTA APLIKASINYA

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Meraih Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Jurusan Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Alauddin Makassar

Oleh:

KASRINA KAMALUDDIN
NIM. 60600111028

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI ALAUDDIN
MAKASSAR
2015

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan penuh kesadaran, penyusun yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi ini benar adalah hasil karya penyusun sendiri. Jika di kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan duplikat, tiruan, plagiat, atau dibuat oleh orang lain, sebagian atau seluruhnya, maka skripsi dan gelar yang di peroleh karenanya batal demi hukum.

Makassar,   Agustus 2015

Penyusun,

Kasrina Kamaluddin
Nim. 60600111028

PENGESAHAN SKRIPSI

Skripsi yang berjudul "Analisis Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear serta Aplikasinya", yang disusun oleh saudari **KASRINA KAMALUDDIN**, Nim: **60600111028** Mahasiswa Jurusan Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar, telah diuji dan dipertahankan dalam sidang *munaqasyah* yang diselenggarakan pada hari Kamis tanggal **03 September 2015 M**, bertepatan dengan **19 Dzulkaidah 1436 H**, dinyatakan telah dapat diterima sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.).

Makassar, 03 September 2015 M
19 Djulkaidah 1436 H

DEWAN PENGUJI

Ketua	: Prof. Dr. H. Arifuddin Ahmad, M.Ag.	(.....................)
Sekretaris	: Muhammad Ridwan, S.Si., M.Si.	(.....................)
Munaqisy I	: Ermawati, S.Pd., M.Si.	(.....................)
Munaqisy II	: Nur Aeni Yunus, S.Si., M.Pd.	(.....................)
Munaqisy III	: Dr. Hasyim Haddade, S.Ag., M.Ag.	(.....................)
Pembimbing I	: Wahyuni Abidin, S.Pd., M. Pd.	(.....................)
Pembimbing II	: Try Azisah Nurman, S.Pd., M. Pd.	(.....................)

Diketahui oleh:
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Alauddin Makassar

Prof. Dr. H. Arifuddin Ahmad, M.Ag
Nip. 19691205 199303 1 001

MOTTO

"Musuh yang paling berbahaya di atas dunia ini adalah penakut dan bimbang.

Teman yang paling setia, hanyalah keberanian dan keyakinan yang teguh."

(Andrew Jackson)

Keyakinan adalah kunci yang menjadi
faktor utama dalam sebuah keberhasilan.

Berangkat dengan penuh keyakinan
Berjalan dengan penuh keikhlasan
Istiqomah dalam menghadapi cobaan

Libatkan Tuhan dalam setiap Langkahmu
(Rahmat Hamid)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan rasa syukur kepada Allah swt. dengan

Segenap kerendahan, ketulusan dan keikhlasan hati

Kupersembahkan skripsiku ini untuk

Orang-orang yang kusayangi:

1. Ibunda Rusmini dan Ayahanda Kamaluddin yang telah mengasuh, membimbing, dan mendidikku dengan sepenuh jiwa raga serta tak henti-hentinya mendoakan dengan tulus dan memberi kasih sayang yang tak terhingga. Semoga Rahmat dan Hidayah Allah swt. selalu menyertai disetiap langkah beliau.
2. Keluarga besar dan Adikku (Muh. Ilham K) yang selalu memberikan semangat dan doa serta bantuannya untuk kelancaran penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
3. Semua guru dan dosenku yang telah memberikan ilmu pengetahuan serta pengalaman yang sangat berarti dalam hidupku. Terima kasih atas segala ilmu yang telah engkau berikan, semoga senantiasa menjadi ilmu yang bermanfaat dan barokah.
4. Sahabat dan semua teman-teman di jurusan Matematika (Limit) angkatan 2011 yang tak mungkin penulis sebutkan satu persatu, untuk kalian semua terimakasih telah menjadi sahabat dan teman terbaik untuk saya selama ini, terimakasih karena selalu ada dan mendoakan yang tebaik untuk saya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.

KATA PENGANTAR

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Assalamu' alaikum Wr.Wb.

Puji syukur kehadirat Allah swt, karena atas rahmat dan hidayah-Nyalah sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian dan penyusunan skripsi ini dengan baik.

Skripsi dengan judul **"Analisis Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear serta Aplikasinya"** yang merupakan tugas akhir dalam menyelesaikan studi dan sebagai salah satu syarat yang harus dipenuhi untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) pada program studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar.

Perjalanan dalam meraih pengetahuan selama ini merupakan pengalaman yang sangat berharga dengan nilai yang tak terhingga. Ketekunan dan keseriusan senantiasa diiringi do'a telah mengantar penulis untuk mendapatkan semestinya, walaupun tidak seutuhnya. Penulis tidak dapat memungkiri bahwa apa yang diperoleh selama ini adalah perjuangan bersama. Dukungan, semangat dan perhatian yang tulus menjadi embrio semangat baru dalam mengiringi perjalanan penulis untuk menyelesaikan pengembaraan dalam dunia pengetahuan ini. Sejatinya keberhasilan dan kesuksesan ini tidak lepas dari berbagai dukungan dan peran dari berbagai elemen yang terlibat didalamnya.

Secara khusus penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada kedua orang tua tercinta ayahanda **Kamaluddin** dan ibunda **Rusmini** yang telah mempertaruhkan seluruh hidupnya untuk kesuksesan anaknya, yang telah melahirkan, membesarkan dan mendidik dengan sepenuh hati dalam buaian kasih sayang kepada penulis.

Dalam kesempatan ini pula, penulis mengucapkan terimah kasih banyak yang sedalam-dalamya, kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Musafir Pababbari, M.Si, Selaku rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar
2. Bapak Prof. Dr. H. Arifuddin Ahmad, M.Ag, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Alauddin Makassar
3. Bapak Irwan, S.Si., M.Si selaku ketua jurusan Matematika dan Ibu Wahidah Alwi, S.Si., M.Si selaku sekretaris jurusan Matematika UIN Alauddin Makassar
4. Ibu Wahyuni Abidin, S.Pd., M.Pd selaku pembimbing I, dan Ibu Try Azisah Nurman, S.Pd., M.Pd, selaku pembimbing II yang dengan penuh kesabaran telah meluangkan waktu dan pikirannya untuk memberikan bimbingan, arahan, dan petunjuk mulai dari membuat proposal hingga rampungnya skripsi ini.
5. Ibu Ermawati, S.Pd., M.Si selaku penguji I, Ibu Nur Aeni Yunus, S.Si., M.Pd selaku penguji II, dan Bapak Dr. Hasyim Haddade, S.Ag., M.Ag selaku penguji III yang dengan penuh kesabaran dalam menguji serta memberi saran demi kesempurnaan dan terselesaikannya skripsi ini.
6. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen Jurusan Matematika dan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Alauddin Makassar yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk mengikuti pendidikan, memberikan ilmu pengetahuan, dan pelayanan yang layak selama penulis melakukan studi.
7. Seleruh keluarga besar penulis, terkhusus dan teristimewa buat adikku Muh. Ilham K yang telah membantu demi kelancaran penyelesaian skripsi ini.
8. Sahabat dan Teman-teman seperjuangan L1M1T angkatan 2011 (Leader 1n Math ScIenTech) terkhusus untuk L1M1T ‘A’ yang selama ini memberikan banyak motivasi, masukan dan bantuan bagi penulis.

9. Sahabat-sahabat KKN Reguler Angk ke-50 UIN Alauddin Makassar, Kab. Bantaeng, kec. Tompobulu, desa. Bonto-Bontoa yaitu Riskawati, S.Kep, Suhail, Nur Zaenab, Abdul Kadir, Sidarwati, Muh. Yunus, Zulhijrah, Kordes Imran Rosyadi, dan terkhusus Rahmat Hamid yang telah membantu, memotivasi, menyemangati serta mendoakan penulis.
10. Semua pihak yang telah membantu hingga terselesaikannya skripsi ini, baik secara langsung maupun tidak langsung, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga skripsi yang penulis persembahkan ini dapat bermanfaat. Akhirnya, dengan segala kerendahan hati, penulis memohon maaf yang sebesar-besarnya atas segala kekurangan dan keterbatasan dalam penulisan skripsi ini. Saran dan kritik yang membangun tentunya sangat dibutuhkan untuk penyempurnaan skripsi ini.

Wassalamu alaikum Wr.Wb

Makassar, Agustus 2015
Penulis,

Kasrina Kamaluddin
Nim. 60600111028

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

A	:	Matriks A
T	:	Transpose
Det	:	Determinan
$\vert\ \vert$	:	Determinan Matriks
$\neq$	:	Tidak sama dengan
$=$	:	Sama Dengan
$+$	:	Penjumlahan
$\times$	:	Perkalian
$\div$	:	Pembagian
$-$	:	Pengurangan

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Nama : **Kasrina Kamaluddin**

Nim : **60600111028**

Judul : **Analisis Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear serta Aplikasinya.**

Skripsi ini membahas tentang Analisis Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer dalam menyelesaikan sistem persamaan linear serta Aplikasinya dalam bidang Ekonomi khususnya pada *Product Mix Problem*. Pada metode Eliminasi Gauss, dari suatu matriks awal (matriks A) dilakukan operasi baris elementer untuk memperoleh matriks segitiga atas, kemudian mensubtitusi balik untuk memperoleh solusi sistem persamaan linear. Pada Aturan Cramer, dari suatu matriks awal (matriks A) akan dibentuk beberapa buah matriks, kemudian mencari nilai determinan dari matriks-matriks yang telah terbentuk. Selanjutnya adalah mencari solusi sistem persamaan linear dengan rumus: $x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}, \ldots, x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$, dengan $n = 1,2, \ldots ,6$. Tujuan dari penelitian ini, untuk membandingkan efektifitas Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dan dalam menentukan jumlah produksi pada product mix problem. Jenis penelitian yang dilakukan yaitu penelitian kepustakaan *(library research)* dengan mengumpulkan beberapa literatur baik berupa buku maupun jurnal yang berkaitan dengan penelitian ini.

Adapun hasil yang didapatkan dengan matriks yang berukuran 6×6 yaitu:
Metode eliminasi gauss lebih efektif dibandingkan dengan Aturan Cramer. Perbandingan ini dapat dilihat dari banyaknya langkah penyelesaian, kecepatan, dan ketepatan dalam menyelesaikan sistem persamaan linear. Begitupun pada aplikasinya dibidang ekonomi khususnya dalam *product mix problem* penggunaan eliminasi gauss lebih efektif dibanding dengan aturan cramer.

Kata Kunci: *Eliminasi Gauss, Aturan Cramer, Sistem Persamaan Linear*.

BAB I
PENDAHULUAN

A. *Latar Belakang*

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi yang menopang perkembangan budaya dan kehidupan manusia di berbagai belahan dunia sejak masa lalu, kini, dan masa yang akan datang dipengaruhi oleh kemajuan dalam bidang matematika. Matematika berkembang seiring dengan peradapan manusia. Sejarah ilmu pengetahuan menempatkan matematika pada puncak hierarki ilmu pengetahuan. Matematika seolah-olah menjadi ratu bagi ilmu pengetahuan.[1] Matematika telah diciptakan dan sengaja disediakan untuk menuntun manusia memahami kekuasaan Allah swt. Firman Allah dalam QS. Al Furqan (25) ayat 2.

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى
ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Terjemahnya:

> "Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya."

Ayat di atas menjelaskan bahwa kekuasaan Allah swt. menciptakan dan mengatur dengan ketetapan atau takdir segala sesuatu sesuai dengan ketentuan dan hukum-hukumnya. Berdasarkan penjelasan tersebut maka semua makhluk

[1] Abdul Halim Fathani, *Mukjizat Angka di dalam Al-Qur'an*, (Jakarta: QultumMedia, 2011), h. 148 & 157

telah ditetapkan oleh Allah swt. kadarnya dalam hal-hal tertentu. mereka tidak dapat melampaui batas ketetapan itu.[2]

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi.

Matematika merupakan ilmu yang tidak terlepas dari alam dan agama, semua itu kebenarannya bisa kita lihat dalam al-Quran.[3] Ada kajian al-Quran dalam perspektif matematikanya karena sudah berkaitan dengan ukuran tertentu, seperti halnya pada matriks. Dimana matriks ada yang berukuran $n \times n$ dan $m \times n$.

Teori Aljabar Linear merupakan cabang dari matematika. Aljabar linear mempunyai penerapan pada berbagai bidang ilmu alam dan sosial serta teknologi khususnya teknologi informasi dan komunikasi (infokom) yang saat ini berkembang pesat. Ilmu yang dipelajari pada materi Aljabar Linear salah satunya yaitu Persamaan Linear dan Sistem Persamaan Linear.

Persamaan Linear adalah suatu persamaan yang pada saat digambarkan kurvanya berupa garis lurus, sedangkan Sistem Persamaan Linear adalah suatu sistem yang didalamnya terdiri minimal 2 persamaan linear.[4] Persamaan Linear

---

[2] M. Quraish Shihab, *Tafsir Al-Misbah Volume 9*, (Jakarta: Lentera Hati, 2002), h. 419-420

[3] Hairur Rahman. *Indahnya Matematika dalam Al-Quran*. (Malang: UIN-Malang Press, 2007), h. 1

[4] Krisnawati. *Studi Kasus Terhadap Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dengan Eliminasi Gauss, Jurnal DASI.* 1411-3201. 2009

dapat terdiri dari m persamaan dan n variabel atau dapat terdiri dari n persamaan dan n variabel. Penyelesaian bentuk ini dapat diselesaikan melalui matriks. Sistem Persamaan Linear merupakan bagian dari ilmu matematika yang mempelajari bagaimana menyelesaikan masalah teknik dengan menggunakan aljabar linear.[5]

Matriks didefinisikan sebagai susunan persegi panjang dari bilangan-bilangan yang diatur dalam baris dan kolom serta dibatasi dengan tanda kurung. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri atau elemen dalam matriks.[6] Sedangakan dalam matematika, matriks dapat digunakan untuk menangani model-model linear, seperti mencari penyelesaian sistem persamaan linear.

Masalah yang sering muncul dalam mencari penyelesaian sistem persamaan linear biasanya berhubungan dengan ukuran matriks. semakin besar matriksnya, semakin rumit juga perhitungannya, sehingga dibutuhkan metode yang tepat. Penyelesaian sistem persamaan linear dengan m persamaan dan n variabel dapat menggunakan Eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan, sedangkan untuk n persamaan dan n variabel dapat menggunakan beberapa metode, antara lain Eliminasi Gauss, Metode Gauss-Jordan, Metode Matriks Invers, Aturan Cramer, Dekomposisi LU (faktorisasi segitiga atas-bawah) dan Dekomposisi Crout.

Pada penelitian ini, penulis menggunakan beberapa metode, diantaranya Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer. Metode Eliminasi Gauss adalah proses eliminasi dengan menggunakan operasi elementer (eselon) baris atau

---

[5] Rina Candra Noor Santi. *Implementasi Sistem Persamaan Linear menggunakan Metode Aturan Cramer, Jurnal Teknologi Informasi DINAMIK Volume 17*. 34-38. 2012

[6] Ririen Kusumawati. *Aljabar Linear dan Matriks*. (Malang: UIN-Malang Press, 2009),
h. 1

mengubah sistem linear menjadi matriks berbentuk segitiga, kemudian dipecahkan dengan subtitusi langkah mundur. Aturan Cramer adalah salah satu metode pencarian nilai variabel dengan menggunakan determinan. Aturan Cramer memberikan kita suatu metode yang mudah untuk menuliskan penyelesaian sistem persamaan linear $n \times n$ dengan determinan.[7]

Adapun aplikasi dari Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer yaitu dalam bidang Ekonomi khususnya dalam *Product Mix Problem*. Pada Riset Operasi, *Product Mix Problem* dikenal dengan Metode Simpleks. Permasalahan *Product Mix Problem* berkaitan dengan penentuan maksimal hasil produksi untuk menghasilkan untung yang maksimum. *Product Mix Problem* lebih mudah dalam menyelesaikan suatu permasalahan yang berhubungan dengan hasil produksi dibanding metode simpleks.

Penelitian sebelumnya yaitu Skripsi Iin Indrayani dengan judul “Analisis Dekomposisi Crout, Metode Eliminasi Gauss dan Metode Matriks Invers serta Aplikasinya dalam Bidang Ekonomi Khususnya dalam Analisis Input Output” telah membahas tentang efektifitas Dekomposisi Crout, Metode Eliminasi Gauss dan Metode Matriks Invers dalam menyelesaikan sistem persamaan linear. Pada skripsi ini diperoleh kesimpulan bahwa metode eliminasi Gauss lebih efektif (langkah penyelesaian dan jumlah operasi aritmatikanya lebih sedikit, serta kecepatan dan ketepatannya lebih baik) dibanding Dekomposisi Crout dan Metode Matriks Invers.

[7] Steven J. Leon. *Aljabar Linear dan Aplikasinya* .(Jakarta: Erlangga, 2001), h. 96

Hasil penelitian inilah yang memberikan motivasi kepada penulis untuk meneliti lebih lanjut tentang efektifitas Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer dalam menyelesaikan Sistem Persamaan Linear yang berukuran besar 6 persamaan dan 6 variabel serta Aplikasinya dalam Bidang Ekonomi khususnya dalam *Product Mix Problem.*

B. *Rumusan Masalah*

Berdasarkan uraian dari latar belakang di atas, maka penulis merumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana perbandingan efektifitas Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer dalam menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dilihat dari segi banyaknya langkah penyelesaian, kecepatan dan ketepatan?
2. Bagaimana perbandingan keefektifitasan Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer dalam menentukan jumlah produksi pada *Product Mix Problem*?

C. *Tujuan Penelitian*

Berdasarkan uraian dari rumusan masalah sebelumnya, maka tujuan penulisan ini adalah:

1. Membandingkan efektifitas Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer dalam menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dari segi banyaknya langkah penyelesaian, kecepatan dan ketepatan.
2. Membandingkan keefektifitasan Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer dalam menentukan jumlah produksi pada *Product Mix Problem*.

D. *Manfaat Penelitian*

Manfaat yang dapat diberikan dari hasil penulisan ini adalah:

1. Bagi Penulis

Adapun manfaat yang dapat diperoleh dari penulisan ini ialah sebagai sarana pengaplikasian ilmu yang telah diperoleh selama mengikuti proses perkuliahan serta memperdalam pemahaman penulis mengenai Sistem Persamaan Linear.

2. Bagi Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar

Hasil penelitian ini akan menambah perbendaharaan skripsi perpustakaan UIN Alauddin Makassar, sehingga dapat dimanfaatkan oleh mahasiswa UIN Alauddin Makassar dan umum sebagai panduan untuk penyusunan skripsi berikutnya.

3. Bagi Pembaca

Tulisan ini diharapkan dapat menjadi salah satu sumber referensi ataupun koleksi terhadap mata kuliah bidang Aljabar Linear Elementer dan bagi seseorang yang hendak mengetahui berbagai informasi terkait masalah penelitian.

E. *Batasan Masalah*

Agar pembahasan ini nantinya tidak meluas, maka penulis perlu memberikan batasan masalah mengenai matriks yang akan diteliti yaitu:

1. Matriks berukuran 6×6 yang akan diselesaikan dengan Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer. Metode penyelesaian di atas juga akan diaplikasikan dalam bidang ekonomi khususnya dalam *Product Mix Problem*.

2. Sistem Persamaan Linear yang digunakan yaitu sistem persamaan linear tak homogen dan konsisten.

F. *Sistematika Penulisan*

Secara garis besar sistematika penulisan tugas akhir ini dibagi menjadi tiga bagian, yaitu bagian awal tugas akhir, bagian isi tugas akhir, dan bagian akhir tugas akhir.

1. Bagian awal tugas akhir

   Bagian awal tugas akhir terdiri dari halaman judul, halaman pengesahan, motto dan persembahan, kata pengantar, daftar lampiran, dan daftar isi.

2. Bagian isi tugas akhir

   Bagian isi tugas akhir terbagi menjadi lima bab, yaitu:

   Bab I Pendahuluan

   Bab ini berisi tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, pembatasan masalah, dan sistematika penulisan.

   Bab II Tinjauan Pustaka

   Dalam bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji yaitu Matriks, Jenis-jenis Matriks, Operasi pada Matriks, Operasi Elementer, Transpose Matriks, Determinan, Minor dan Kofaktor, Sistem Persamaan Linear dan metode penyelesaian Sistem Persamaan Linear.

   Bab III Metode Penelitian

   Dalam bab ini dikemukakan jenis penelitian, lokasi dan waktu penelitian dan prosedur pelaksanaan penelitian.

Bab IV Hasil Penelitian dan Pembahasan

Pada bab ini dikemukakan hasil penelitian dalam menentukan solusi sistem persamaan linear dengan metode eliminasi gauss dan aturan cramer serta apilikasinya dalam bidang ekonomi khususnya pada Product Mix Problem.

Bab V Kesimpulan

Pada bab ini terdiri dari kesimpulan dan saran.

3. Bagian akhir tugas akhir

Bagian akhir tugas akhir berisi daftar pustaka sebagai acuan dan lampiran-lampiran yang mendukung.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

A. *Matriks*

1. Definisi Matriks

Definisi 2.1.1:

Matriks didefinisikan sebagai susunan persegi panjang dari bilangan-bilangan yang diatur dalam baris dan kolom. Matriks ditulis sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Susunan di atas disebut sebuah matriks m kali n (ditulis $m \times n$) karena memiliki m baris dan n kolom.[8]

Matriks merupakan suatu susunan angka berbentuk segiempat. Angka-angka dalam susunan itu disebut anggota dalam matriks. Ukuran matriks dinyatakan oleh jumlah baris dan jumlah kolom yang terdapat didalamnya.[9]

Contoh 2.1.1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = [2 \quad 1 \quad 0 \quad -3], \quad C = \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ukuran *(size)* suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (arah horizontal) dan kolom (arah vertikal) yang dimilikinya. Sebagai contoh, matriks pertama pada contoh 1 memiliki tiga baris dan dua kolom, sehingga

---

[8] G. Hedley. *Aljabar Linear*. (Jakarta: Erlangga, 1983), h. 51
[9] Heri Adrianto, Agus Prijono. (Bandung: Rekaya Sains, 2006), h. 13

ukurannya adalah 3 kali 2 (yang ditulis 3 x 2). Pada penulisan ukuran, bilangan pertama selalu menunjukkan jumlah baris dan bilangan kedua menunjukkan jumlah kolom. Kita sebaiknya menggunakan huruf kapital untuk menyatakan matriks dan huruf kecil untuk menyatakan kuantitas numerik, jadi kita dapat menulis

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{atau} \qquad C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Entri yang terletak pada baris i dan kolom j didalam matriks A akan dinyatakan sebagai a_{ij}. Jadi, matriks umum 3×4 dapat ditulis sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Dan matriks umum $m \times n$ sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Entri pada baris i dan kolom j dalam matriks A juga biasa dinyatakan dengan simbol $(A)_{ij}$. Jadi, untuk matriks A di atas, memiliki

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

Dan untuk matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Memiliki $(A)_{11} = 2, (A)_{12} = -3, (A)_{21} = 7, (A)_{22} = 0$

2. Jenis-Jenis Matriks

a) Matriks Bujur sangkar

Suatu matriks A dengan jumlah baris n dan jumlah kolom n disebut matriks bujur sangkar ordo n (*square matrix of order n*) dari entri $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Secara umum matriks $n \times n$ ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2.1:

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Matriks Baris

Suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris disebut matriks baris (atau vektor baris). Matriks baris umum A, $1 \times n$ akan ditulis sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2.2:

$$A_{1\times 4} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

c) Matriks Kolom

Suatu matriks yang hanya terdiri dari satu kolom disebut matriks kolom (atau vektor kolom). Matriks kolom umum B, $m \times 1$ akan ditulis sebagai

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2.3:

$$B_{2\times1} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

d) Matriks Simetris

suatu matriks bujursangkar A adalah simetris *(symmetric)* jika $A = A^T$.

Contoh 2.2.4:

Matriks-matriks berikut ini adalah simetris, karena masing-masing setara dengan transposenya.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

Suatu matriks $A = (a_{ij})$ adalah simetris, jika dan hanya jika $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua nilai i dan j. Semua matriks diagonal adalah simetris.

e) Matriks Segitiga atas

Matriks bujur sangkar yang semua entri di bawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga atas *(upper triangular)*.

Contoh 2.2.5:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga atas 4×4

f) Matriks Segitiga bawah

Matriks bujursangkar yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matrik segitiga bawah *(lower triangular)*.

Contoh 2.2.6:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & 8 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga bawah 4×4

g) Matriks Diagonal

Semua matriks bujursangkar yang semua entrinya yang tidak terletak pada diagonal utama adalah nol disebut matriks diagonal *(diagonal matrix)*.

Suatu matriks diagonal umum D, $n \times n$, dapat ditulis sebagai

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$ [10]

Contoh 2.2.7:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

h) Matriks Skalar

Matriks diagonal yang semua komponen diagonal utamanya merupakan bilangan yang sama disebut matriks skalar. Jika komponen diagonal utamanya 1, matriks tersebut dinamakan matriks identitas.

Contoh 2.2.8:

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

[10] Howard Anton. *Aljabar Linear Elementer edisi kedelapan*. (Jakarta: Erlangga), h. 74-78

i) Matriks Identitas

Matriks diagonal yang semua komponen diagonal utamanya adalah 1 disebut matriks identitas. Matriks identitas dinotasikan sebagai $I_{n\times n}$ atau I_n yang berarti matriks identitas berordo $n \times n$.

Contoh 2.2.9:

$$I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

j) Matriks Nol

Matriks Nol adalah matriks yang semua anggotanya bernilai nol.

Contoh 2.2.10:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aturan aritmetika matriks:

$A + 0 = 0 + A = A$

$A - A = 0$

$0 - A = -A$

$A \times 0 = 0;\ 0 \times A = 0.$ [11]

k) Matriks Eselon

Suatu matriks dikatakan memiliki bentuk eselon baris jika

i) Entri bukan nol pertama dalam setiap baris adalah 1.

[11] Heri Andrianto, Agus Prijono. *Menguasai Matriks dan Vektor*. (Bandung: Rekayasa, 2006), h. 17

ii) Jika baris k tidak seluruhnya mengandung nol, maka banyaknya entri nol dibagian muka pada baris $k+1$ lebih besar dari banyaknya entri nol dibagian muka pada baris k.

iii)Jika terdapat baris-baris yang entrinya semuanya nol, maka baris-baris ini berada dibawah baris-baris yang memiliki entri-entri nol.

Contoh 2.2.11:

Matriks-matriks ini memiliki bentuk eselon baris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2.12:

Matriks-matriks berikut tidak memiliki bentuk eselon baris

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks A tidak memenuhi syarat (i). Matriks B gagal memenuhi syarat (iii), dan matriks C gagal memenuhi syarat (ii).[12]

3. Operasi pada matriks

a) Penjumlahan pada matriks

Definisi 2.3.1

Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah *(sum)* $A+B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada B dengan entri-entri yang bersesuain pada A. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat ditambahkan.

[12] Steven J. Leon. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. (Jakarta: Erlangga, 2001), h. 14

Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama, maka

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$ [13]

Ditulis $A + B$ adalah matriks $C = [c_{ij}]$ yang berordo $m \times n$ maka:

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$ [14]

Contoh 2.3.1:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 + (-4) & 1 + 3 & 0 + 5 & 3 + 1 \\ -1 + 2 & 0 + 2 & 2 + 0 & 4 + (-1) \\ 4 + 3 & -2 + 2 & 7 + (-4) & 0 + 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Pernyataan $A + E, B + E$ tidak terdefinisi.[15]

Jadi $A + B = C$ adalah matriks berukuran $m \times n$ yang unsur-unsur elemennya memenuhi:

Sifat-sifat Penjumlahan:

Penjumlahan matriks berlaku sifat:

1. $A + B = B + A$ (Komutatif)

---

[13] Howard Anton. *Aljabar Linear Elementer edisi kedelapan*. (Jakarta: Erlangga), h. 28-29

[14] Rriren Kusumawati. *Aljabar Linear & Matriks*. (Malang: UIN-Malang Press, 2009), h. 4

[15] Howard Anton. *Aljabar Linear Elementer edisi kedelapan*. h. 28-29

Bukti:

Jika $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ dan $B = [b_{ij}]_{m\times n}$

Ruas kiri: $A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n} = [c_{ij}]_{m\times n}$ dengan

$$c_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$$
$$= (a + b)_{ij}$$

Ruas kanan: $B_{m\times n} + A_{m\times n} = D_{m\times n} = [d_{ij}]_{m\times n}$ dengan

$$d_{ij} = (b_{ij} + a_{ij})$$
$$= (b + a)_{ij}$$

Jadi, $[c_{ij}]_{m\times n} = [d_{ij}]_{m\times n}$

Karena matriks pada ruas kiri mempunyai ukuran yang sama seperti pada ruas kanan, dan elemen-elemen yang bersangkutan pada kedua ruas tersebut sama yaitu $[c_{ij}]_{m\times n} = [d_{ij}]_{m\times n}$, maka hukum komutatif untuk penjumlahan $A + B = B + A$ terpenuhi.

Contoh 2.3.2:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, tunjukkan bahwa $A + B = B + A$

Jawab:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+6 & 3-2 \\ 4+4 & -1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa $A + B = B + A$.

2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Assosiatif)

Bukti:

Misalkan $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ dan $C = [c_{ij}]_{m\times n}$

Ruas kiri: $B + C = [x_{ij}]_{m\times n}$ dengan $x_{ij} = (b_{ij} + c_{ij})$

$A + (B + C) = [y_{ij}]_{m\times n}$ dengan

$$\begin{aligned} y_{ij} &= a_{ij} + x_{ij} \\ &= a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) \\ &= (a + b + c)_{ij} \end{aligned}$$

Ruas kanan: $A + B = [z_{ij}]_{m\times n}$ dengan $z_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$

$(A + B) + C = [w_{ij}]_{m\times n}$ dengan

$$\begin{aligned} w_{ij} &= z_{ij} + c_{ij} \\ &= (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} \\ &= (a + b + c)_{ij} \end{aligned}$$

Jadi, $[y_{ij}]_{m\times n} = [w_{ij}]_{m\times n}$

Karena matriks pada ruas kiri mempunyai ukuran yang sama seperti pada ruas kanan, dan elemen-elemen yang bersangkutan pada kedua ruas tersebut sama yaitu $[y_{ij}]_{m\times n} = [w_{ij}]_{m\times n}$, maka hukum assosiatif untuk penjumlahan $A + (B + C) = (A + B) + C$ terpenuhi.

Contoh 2.3.3:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

Tunjukkan bahwa $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Jawab:

$$B + C = \begin{bmatrix} 6+5 & -2+2 \\ 4+7 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} 1+11 & 3+0 \\ 4+11 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 15 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+6 & 3-2 \\ 4+4 & -1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A + B) + C = \begin{bmatrix} 7+5 & 1+2 \\ 8+7 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 15 & 0 \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa $A + (B + C) = (A + B) + C$

b) Pengurangan pada matriks

Definisi 2.3.2

Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka selisih *(difference)* $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian pada B. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dikurangkan.

Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama, maka

$$(A - B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Contoh 2.3.4:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-(-4) & 1-3 & 0-5 & 3-1 \\ -1-2 & 0-2 & 2-0 & 4-(-1) \\ 4-3 & -2-2 & 7-(-4) & 0-5 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

Pernyataan $A - C, B - C$ tidak terdefinisi

c) **Perkalian pada matriks**

Definisi 2.3.3

Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$ maka hasilkali *(product)* AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB, dipisahkanlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.

Secara umum, jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks $m \times r$, dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks $r \times n$, maka

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

Entri $(AB)_{ij}$ pada baris i dan kolom j dari AB diperoleh melalui

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}.$$ [16]

Contoh 2.3.5:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

[16] Howard Anton. *Aljabar Linear Elementer edisi kedelapan*, h. 30-32

$$C = AB = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [3(4) + 0(6)] & [3(7) + 0(8)] \\ [1(4) + 1(6)] & [1(7) + 1(8)] \\ [5(4) + 2(6)] & [5(7) + 2(8)] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 21 \\ 10 & 15 \\ 32 & 51 \end{bmatrix}$$

4. Operasi Baris Elementer

Untuk menentukan solusi dari SPL (Sistem Persamaan Linear), maka kita lakukan dengan cara membentuk matriks yang diperluas (*augmented matrix*) dari SPL dan melakukan Operasi Baris Elementer (OBE) pada matriks yang diperluas tersebut. Bentuk umum SPL dengan *n* variabel dan *m* persamaan, dapat dituliskan dengan notasi matriks: $AX = B$.

Langkah-langkah operasi baris elementer dengan menggunakan matriks:

a. Mangalikan sebuah baris dengan konstanta bukan nol

b. Menukarkan dua baris

c. Menambahkan perkalian dari suatu baris ke baris lainnya.[17]

Contoh 2.4.1:

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$

$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$

$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$

[17] Heri Adrianto, Agus Prijono. *Menguasai Matriks dan Vektor*. (Bandung: Rekayasa Sains, 2006), h. 4-5

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Untuk baris kedua: baris pertama dikalikan -2 kemudian ditambahkan baris kedua.

Untuk baris ketiga: baris pertama dikalikan -3 kemudian ditambahkan baris ketiga.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Untuk baris kedua: baris kedua dikalikan $\frac{1}{2}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Untuk baris ketiga: baris kedua dikalikan -3 kemudian ditambahkan baris ketiga.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Untuk baris ketiga: baris ketiga dikalikan -2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Untuk baris pertama: baris kedua dikalikan -1 kemudian ditambah baris pertama.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/2 & 35/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Untuk baris pertama: baris ketiga dikalikan $-\frac{11}{2}$ kemudian ditambahkan baris pertama.

Untuk baris kedua: baris ketiga dikalikan $\frac{7}{2}$ kemudian ditambahkan baris kedua.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai dari x_1, x_2, x_3 adalah $1, 2, 3$.

5. Transpose Matriks

Transpose dari suatu matriks dapat diperoleh dengan menukarkan unsur-unsur pada baris dan kolom, misalnya unsur pada baris pertama diubah menjadi unsur pada kolom pertama dan seterusnya.[18]

Definisi 2.5.1:

Transpose dari matriks A berorde $m \times n$ adalah matriks B berorde $n \times m$ yang didefinisikan oleh:

$$b_{ji} = a_{ij}$$

Untuk $j = 1,2, \ldots, n$ dan $i = 1,2, \ldots, m$. Transpose $\boldsymbol{A}$ dinyatakan oleh A^T.

Sebagai akibat dari $b_{ji} = a_{ij}$ terlihat bahwa baris ke-j dari A^T memiliki entri-entri yang sama dengan entri-entri dari kolom ke-j dari A, dan kolom ke-i dari A^T memiliki entri-entri yang sama dengan entri-entri dari baris ke-i dari A.

[18] Drs. Andi Supangat, M.Si. *Matematika untuk Ekonomi dan Bisnis*. (Jakarta: Kencana, 2011), h. 201

Contoh 2.5.1:

a) Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, maka $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

b) Jika $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, maka $B^T = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

c) Jika $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, maka $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Aturan-aturan Aljabar untuk Transpose

1) $(A^T)^T = A$

   Bukti:

   Misalkan $A = (a_{ij})$ maka $(a_{ji})^T = a_{ij} = A$. Terbukti

2) $(kA)^T = kA^T$

   Bukti:

   $A = (a_{ij})$ maka $k(a^T) = k(a_{ji}) = (ka_{ji}) = (ka_{ij})^T = (kA)^T$.

   Terbukti

3) $(A + B)^T = A^T + B^T$ dan $(A - B)^T = A^T - B^T$

   Bukti:

   Misalkan $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ maka

   $(A + B)^T = (a_{ij} + b_{ij})^T = (c_{ij})^T = (c_{ji}) = (a_{ji} + b_{ji}) = A^T + B^T$.

   Terbukti

4) $(AB)^T = A^T B^T$.[19]

   Bukti:

[19] Steven J. Leon. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. (Jakarta: Erlangga, 2001), h. 46-47

Misalkan $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$

$(AB)^T = (a_{ij}b_{ij})^T = (c_{ij})^T = (c_{ji}) = (a_{ji}b_{ji}) = A^TB^T$. Terbukti

6. Determinan

Definisi 2.6.1:

A adalah matriks bujur sangkar. Determinan matriks A yang disimbolkan $\det(A)$ dapat didefinisikan sebagai jumlahan semua hasil perkalian elementer bertanda dari matriks A.[20] Determinan dinotasikan dengan tanda $|\quad|$.

a. Determinan dari matriks 2×2

Jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, maka $|A| = a_{11}(a_{22}) - a_{12}(a_{21})$

Contoh 2.6.1:

$|A| = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 4(5) - 2(3) = 14$

b. Determinan dari matriks 3×3

Cara singkat yang lazim dikenal untuk menghitung determinan dari matriks 3×3 adalah dengan menggunakan metode *sarrus*. Caranya dengan menempatkan elemen-elemen pada dua kolom pertama disebelah kanan notasi determinan sebagai berikut:

$$|A| = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$|A| = [(a_{11})(a_{22})(a_{33}) + (a_{12})(a_{23})(a_{31}) + (a_{13})(a_{21})(a_{32})] -$

[20] R. Gunawan Santosa. *Aljabar Linear Dasar*. (Yogyakarta: ANDI, 2009), h. 44

$$[(a_{13})(a_{22})(a_{31})+(a_{11})(a_{23})(a_{32})+(a_{12})(a_{21})(a_{33})]^{21}$$

Contoh 2.6.2:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{matrix}$$

$$|A| = [(3)(2)(0)+(1)(4)(1)+(2)(0)(5)] -$$

$$[(2)(2)(1)+(3)(4)(5)+(1)(0)(0)]$$

$$= (0+4+0)-(4+60+0) = 4-64$$

$$= -60.$$

Jadi, determinan matriks diatas adalah -60.

Pada penelitian ini akan digunakan metode salihu untuk menentukan determinan dari matiks yang berukuran 6×6 $(n>3)$.

7. Minor dan kofaktor

Definisi 2.7.1

Bila $\boldsymbol{A}$ adalah sebuah matriks bujursangkar, maka **minor** elemen a_{ij} (disimbolkan dengan M_{ij}) didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang ada setelah baris ke-i dan kolom ke-j dicoret dari A. Nilai $(-1)^{i+j}$ ditulis sebagai C_{ij} dan dinamakan **kofaktor** elemen a_{ij}.

Jadi $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.[22]

Contoh 2.7.1:

Diberikan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, maka

[21] Pudjiastuti BSW. *MATRIKS-Teori dan Aplikasi*. (Yogyakarta: Graha Ilmu, 2006), h. 16-17

[22] R. Gunawan Santosa. *Aljabar Linear Dasar*. (Yogyakarta: ANDI, 2009), h. 49-52

$$M_{32} = det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = (1)(-3) - (1)(-1) = -3 + 1 = -2$$

dan $C_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = (-1)(-2) = 2$

Jadi, $C_{32} = 2$ dan $M_{32} = -2$

$$M_{11} = det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= det\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = (3)(1) - (-3)(-2) = 3 + 6 = 9$$

Dan $C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (1)(9) = 9$

Jadi, $C_{11} = 9$ dan $M_{11} = 9$

B. *Sistem Persamaan Linear*

1. Pengertian sistem persamaan linear

Sistem Persamaan Linear (SPL) adalah himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linear dalam peubah $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Bentuk umum sistem persamaan linear dalam m persamaan dan n variabel yang tidak diketahui (*unknow*) adalah:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n$$

Jika $b_i = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (SPL Homogen)

Jika tidak semua $b_i = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ (SPL Non Homogen).[23]

Contoh 2.8.1:

Pasangan berurutan $(1, -1)$ merupakan penyelesaian dari sistem persamaan linear dengan dua variabel x dan y:

$2x - 3y = 5$

$-x + 2y = -3$

Subtitusikan $x = 1$ dan $y = -1$ ke kedua persamaan seperti berikut:

$2(1) - 3(-1) = 5$ dan $-(1) + 2(-1) = -3$

Karena$(1, -1)$ memenuhi kedua persamaan, maka dikatakan bahwa $(1, -1)$ merupakan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear tersebut. Jika sistem persamaan linear hanya memiliki satu penyelesaian, maka tidak ada lagi pasangan bilangan yang memenuhi sistem persamaan linear tersebut selain $(1, -1)$.

Sistem persamaan linear disebut **konsisten** jika sistem persamaan linear tersebut mempunyai paling sedikit satu penyelesaian, dan disebut **tak konsisten** apabila sistem tersebut tidak mempunyai penyelesaian.

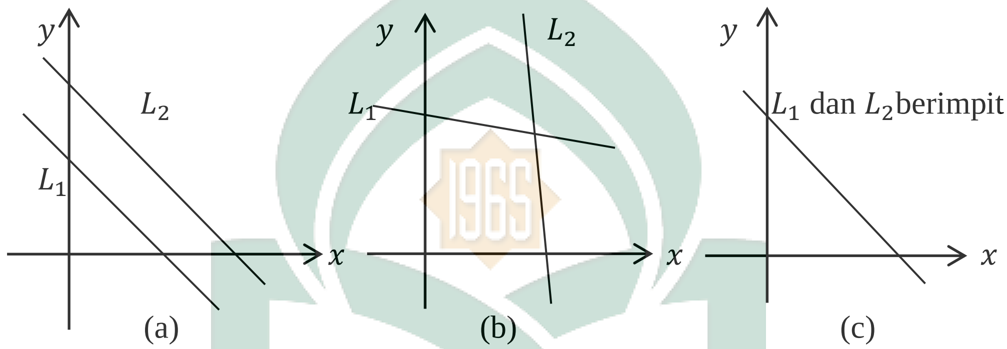
Perhatikan sistem umum dari dua persamaan linear dengan variabel x dan y berikut:

$a_1x + b_1y = c_1$ (a_1, b_1 kedua-duanya tidak nol)

$a_2x + b_2y = c_2$ (a_2, b_2 kedua-duanya tidak nol)

[23] Ririen Kusumawati. *Aljabar Linear & Matriks*. (Malang: UIN-Malang Press, 2009), h. 33-34

Telah diketahui bahwa persamaan linear $ax + by = c$ menyatakan grafik berupa garis pada bidang xy (ingat persamaan grafik fungsi linear $y = mx + c$ berupa garis lurus). Jadi sistem tersebut dapat digambarkan sebagai dua garis L_1 dan L_2 pada bidang xy. Ada tiga kemungkinan kedudukan kedua garis tersebut. (perhatikan gambar)



Gambar 2.1 Kemungkinan-kemungkinan solusi sistem persamaan linear 2 persamaan dan 2 variabel

(a) Garis L_1 dan L_2 **sejajar**, sehingga tidak ada titik potong antara kedua garis, sebagai konsekuensinya sistem tidak mempunyai penyelesaian.

(b) Garis L_1 dan L_2 **berpotongan**, sehingga terdapat satu titik potong antara kedua garis, sebagai konsekuensinya sistem hanya mempunyai satu penyelesaian (penyelesaian tunggal).

(c) Garis L_1 dan L_2 **berimpit**, sehingga kedua garis berpotongan disetiap titik sepanjang kedua garis tersebut, sehingga konsekuensinya sistem mempunyai tak terhingga banyaknya penyelesaian.[24]

[24] Heri Purwanto, Gina Indriani, Erlina Dayanti. *Aljabar Linear*. (Jakarta: PT. Ercontara Rajawali, 2005), h. 14

Pada penelitian ini akan diteliti bentuk sistem persamaan linear dengan 6 persamaan dan 6 variabel. Bentuk sistem persamaan linear 6×6 yang akan diteliti, yaitu:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_6 &= 10 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 12 \\
3x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 &= 14 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 &= 16 \\
2x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 &= 18 \\
x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 + 3x_6 &= 20
\end{aligned}
$$

Kemudian sistem persamaan linear di atas akan dibentuk kedalam matriks, sebagai berikut:

$$
A = \begin{bmatrix}
1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 10 \\
2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 12 \\
0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 14 \\
1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 16 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 18 \\
0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 20
\end{bmatrix}
$$

Matriks di atas akan diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi gauss dan aturan cramer.

2. Metode penyelesaian sistem persamaan linear

a) Metode Eliminasi Gauss

Eliminasi Gauss diperkenalkan Karl Friendrich Gauss (1777 – 1855) dengan mengubah matriks diperbesar dari suatu sistem persamaan linear menjadi matriks eselon baris.[25]

---

[25] Rorres. *Ajabar Linear Elementer versi Aplikasinya*. (Jakarta: Erlangga, 2004), h. 14

Dasar utama metode eliminasi gauss adalah menjadikan persamaan linear yang terdiri dari beberapa bilangan yang tidak diketahui menjadi satu bilangan tak diketahui (dengan membuat suatu matriks triangular atas).[26]

Suatu matriks dikatakan memiliki bentuk eselon baris jika

i) Entri bukan nol pertama dalam setiap baris adalah 1.

ii) Jika baris k tidak seluruhnya mengandung nol, maka banyaknya entri nol dibagian muka pada baris $k + 1$ lebih besar dari banyaknya entri nol dibagian muka pada baris k.

iii) Jika terdapat baris-baris yang entrinya semuanya nol, maka baris-baris ini berada dibawah baris-baris yang memiliki entri-entri nol.

Proses menggunakan operasi-operasi baris i, ii, dan iii untuk mengubah suatu sistem linear menjadi sistem yang matriks diperbesarnya dalam bentuk eselon baris disebut Eliminasi Gauss.[27]

Contoh 2.8.2:

Gunakan Metode Eliminasi Gauss untuk memecahkan:

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

$3x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 8$

$2x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 15$

Penyelesaian:

Sistem persamaan linear di atas memberikan matriks sebagai berikut:

[26] Ardi Pujiyanta. *Komputasi Numerik dengan Matlab*. (Yogyakarta: Graha Ilmu, 2007), h. 100

[27] Steven J. Leon. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. (Jakarta: Erlangga, 2001), h. 14

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 9 & 15 \end{bmatrix}$$

Matriks di atas diubah menjadi matriks segitiga atas dengan proses sebagai berikut:

Untuk baris kedua: baris pertama dikalikan -3 kemudian ditambahkan baris kedua.

Untuk baris ketiga: baris pertama dikalikan -2 kemudian ditambahkan baris ketiga. Sehingga matriks menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 15 \end{bmatrix}$$

Untuk baris kedua: baris kedua dikalikan $\frac{1}{2}$. Sehingga matriks menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 15 \end{bmatrix}$$

Untuk baris ketiga: baris kedua dikalikan -3 kemudian ditambahkan baris ketiga. Sehingga matriks menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks diatas sudah dalam bentuk matriks segitiga atas, sehingga diperoleh sistem pesamaan linear sebagai berikut:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 = 4$$

$$x_3 = 3$$

Dengan subtitusi balik, maka solusi sistem persamaan linear di atas adalah

$x_1 = 1,\ x_2 = -2,$ dan $x_3 = 3$

b) Aturan Cramer

Aturan Cramer adalah salah satu metode pencarian nilai variabel dengan menggunakan determinan.[28]

Teorema 2.8.1:

Bila $Ax = B$ adalah Sistem Persamaan Linear yang terdiri dari n persamaan linear dengan n variabel yang tidak diketahui dan det $A \neq 0$, maka Sistem Persamaan Linear tersebut mempunyai penyelesaian tunggal dan penyelesaiannya adalah:

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, \qquad x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}, \dots, \qquad x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$$

Dengan matriks $A_j, j = 1, 2, 3, \dots, n$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti elemen kolom j dari matriks $\boldsymbol{A}$ dengan matriks

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$ [29]

Untuk menentukan determinan pada aturan cramer digunakan metode salihu untuk matriks yang berukuran $n \times n$ $(n > 3)$. Metode salihu menurunkan orde dari determinan. Sebelum pembahasan lebih

[28] Rina Candra Noor Santi. *Implementasi Sistem Persamaan Linier menggunakan Metode Aturan Cramer, Jurnal Informatika DINAMIKA 17, no.1, Januari (2012)*, h. 34-38

[29] R. Gunawan Santosa. *Aljabar Linear Dasar*. (Yogyakarta: ANDI, 2009), h. 54

lanjut, akan diperkenalkan beberapa istilah yang berkaitan dengan metode salihu.

1) Determinan Interior

Determinan interior adalah determinan yang berorde $(n-2) \times (n-2)$ dari sebuah matriks yang berorde $n \times n\ (n > 3)$ yang diperoleh dengan cara menghapus baris pertama, menghapus kolom pertama, menghapus baris terakhir dan menghapus kolom terakhir. Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks yang berukuran 4×4:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Maka determinan interiornya

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2) Determinan Unik

Determinan unik adalah determinan yang berorde $(n-1) \times (n-1)$ dari sebuah matriks berorde $n \times n\ (n > 3)$. Dalam metode salihu terdapat empat buah determinan unik, yaitu $|C|, |D|, |E|$ dan $|F|$ yang diperoleh dengan cara menghapus baris terakhir dengan kolom terakhir, menghapus kolom pertama dengan kolom terakhir, menghapus baris pertama dengan kolom terakhir dan menghapus baris pertama dengan kolom pertama. Misalkan A adalah matriks yang berukuran 4×4:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Maka determinan unik:

$$|C| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|D| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$|E| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$|F| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Bentuk umum dari metode salihu untuk menghitung determinan matriks berorde $n \times n$ $(n > 3)$ adalah sebagai berikut:

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{|B|} \cdot \begin{Vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{Vmatrix}, |B| \neq 0$$

Dimana, $|B|$ adalah determinan interior yang berorde $(n-2) \times (n-2)$, sementara $|C|, |D|, |E|$ dan $|F|$ adalah determinan unik yang berorde $(n-1) \times (n-1)$.[30] Metode ini akan digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear 6 persamaan dan 6 variabel $(n > 3)$.

[30]Andi Bahota, dkk. *Menghitung Determinan Matriks* $n \times n$ $(n \geq 3)$ *dengan Menggunakan Metode Salihu , JOM FMIPA Volume 1. No. 02,* Oktober (2014), h. 346-348.

Contoh 2.8.3:

Gunakan Aturan Cramer untuk memecahkan:

$$x_1 \qquad + 2x_3 = 6$$

$$-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30$$

$$-x_1 \; - 2x_2 + 3x_3 = 8$$

Penyelesaian:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11};$$

$$x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11};$$

$$x_3 = \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{74}{44} = \frac{18}{11};$$ [31]

Aturan Cramer memberikan kita suatu metode yang mudah untuk menuliskan penyelesaian sistem persamaan linear $n \times n$ dengan determinan. Akan tetapi, untuk menghitung penyelesaiannya, kita harus menghitung $n + 1$ banyaknya determinan dengan orde n.[32]

[31] Ririen Kusumawati. *Aljabar Linear & Matriks*. (Malang: UIN-Malang Press, 2009), h. 87-88

[32] Steven J. Leon. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. (Jakarta: Erlangga, 2001), h. 96

C. *Kajian Matematika dalam Al-Qur'an*

1. Q.S Al Furqan (25) ayat 2

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ
شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ٢

Terjemahnya:

> "Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya."

a. Tafsir Q.S Al Furqan (25) ayat 2

Kata *qaddara* dalam ayat ini menurut Quraish Shihab memiliki makna mengukur, memberi kadar/ukuran, sehingga pengertian ayat ini adalah memberi kadar/ukuran/batas-batas tertentu dalam diri, sifat, ciri-ciri kemampuan maksimal, bagi setiap makhluk-Nya.

Semua makhluk telah ditetapkan oleh Tuhan kadarnya dalam hal-hal tersebut. Mereka tidak dapat melampaui batas ketetapan itu. Proses lebih jauh yang disebut dalam surah al-A'la adalah *fa hada* yakni Allah swt. menuntun dan menunjukkan kepada makhluk-makhluk-Nya itu arah yang seharusnya mereka tuju.

Matahari ditakdirkan Allah swt. beredar dalam waktu tertentu, ia tidak dapat melampaui batas tersebut. Allah berfirman:

وَٱلشَّمْسُ تَجْرِى لِمُسْتَقَرٍّ لَّهَا ۚ ذَٰلِكَ تَقْدِيرُ ٱلْعَزِيزِ ٱلْعَلِيمِ ٣٨

Terjemahnya:

> “dan matahari berjalan ditempat peredarannya. Demikianlah ketetapan yang Maha Perkasa lagi Maha mengetahui”(QS Yasiin(36): 38).

Demikian pula bulan:

وَٱلْقَمَرَ قَدَّرْنَٰهُ مَنَازِلَ حَتَّىٰ عَادَ كَٱلْعُرْجُونِ ٱلْقَدِيمِ ﴿٣٩﴾

Terjemahnya:

> “dan telah Kami tetapkan bagi bulan manzilah-manzilah, sehingga (setelah Dia sampai ke manzilah yang terakhir) Kembalilah Dia sebagai bentuk tandan yang tua”(QS Yasiin(36): 39).

Segala sesuatu termasuk manusia ada takdir yang ditetapkan Allah atasnya, takdir tersebut mencakup banyak aspek, antara lain seperti yang dikemukakan oleh Quraish Shihab.[33]

b. Kandungan Q.S Al Furqan (25) ayat 2

Ayat 2 di atas dikomentari oleh penyusun Tafsir al-Muntakhab lebih kurang sebagai berikut: ilmu pengetahuan modern menyatakan bahwa semua makhluk, dari sisi kejadian dan perkembangan yang berbeda-beda, berjalan sesuai dengan sistem yang sangat teliti dan bersifat konstan. Tidak ada yang mampu melakukan itu kecuali Allah, Dzat Yang Maha Pencipta dan Maha Kuasa. Dari sisi kejadiannya, sudah jelas bahwa semua makhluk terlepas dari perbedaan jenis dan bentuknya terdiri atas kesatuan unsur-unsur yang sangat terbatas jumlahnya, hampir seratus unsur. Setiap jenis memiliki sifat-sifat

---

[33] M. Quraish Shihab. *Tafsir Al-Misbah Volume 9*. (Cet. II; Jakarta: Lentera Hati, 2004),
h. 420-421.

tertentu yang diwarisi dari generasi ke generasi semua itu berjalan menurut hukum dan aturan yang bersifat konstan dan teliti yang menggambarkan secara jelas kebesaran dan kekuasaan Allah swt. Maha Suci Allah dari apa yang mereka persekutukan.

2. Q.S. Al-Qamar (54) ayat 49

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ ٤٩

Terjemahnya:

"Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran."[34]

a. Tafsir Q.S. Al-Qamar (54) ayat 49

Ayat di atas menjelaskan bahwa segala yang terjadi di alam kehidupan ini adalah ketentuan Allah swt. dan pembentukannya. Allah swt. maha mengetahui terhadap segala sesuatu sebelum diciptakan oleh-Nya. Dan Allah swt. telah menetapkan sebelum Dia menciptakannya.[35] Apa yang menimpa mereka tidak keluar dari sistem yang ditetapkan Allah sebelumnya, karena *sesungguhnya segala sesuatu* apapun sesuatu itu *telah kami ciptakan dengan kadar* yakni dalam satu sistem dan ukuran yang mengikat mereka sebagai makhluk. Antara lain balasan amal seseorang akan ditemuinya pada saat yang ditentukan Allah, *dan tidaklah urusan* atau perintah *kami* menyangkut apapun yang kami kehendaki, *kecuali sekali* yakni satu perbuatan yang sangat mudah,

---

[34] Depertemen Agama RI. *Al-Quran dan Tafsirnya*. (Jakarta: Lentera Abadi, 2010), h. 419-420

[35] Ahmad Mustafa Al-Maragi. *Tafsir Al-Maragi*. (Semarang: CV Toha Putra, 1993), h. 177

tanpa memerlukan alat atau ucapan, tidak juga waktu. Ia menjadi begitu cepat dan mudah *bagaikan* dalam ukuran kamu wahai manusia, semudah dan sesingkat *sekali kejapan mata* saja bahkan lebih cepat dari pada itu.

Kata *kadar* pada ayat di atas diperselisihkan maknanya oleh para ulama. Dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti *kadar tertentu* yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti *kuasa*. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti *ketentuan* dan *sistem yang ditetapkan terhadap segala sesuatu*. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspeknya saja. Manusia misalnya, telah ada *kadar yang ditetapkan* Allah baginya. Selaku jenis makhluk ia dapat makan, minum dan berkembang biak melalui *sistem yang ditetapkan-Nya*. Manusia memiliki potensi baik dan buruk. Ia dituntut untuk mempertanggungjawabkan pilihannya. Manusia dianugerahi Allah petunjuk dengan kedatangan sekian rasul untuk membimbing mereka. Akal pun dianugerahkan-Nya kepada mereka, demikian seterusnya dan kesemuanya dan yang selainnya termasuk dalam *sistem* yang sangat tepat, teliti dan akurat yang telah ditetapkan Allah swt. demikian juga Allah telah menetapkan *sistem* dan *kadar* bagi ganjaran atau balasan-Nya yang akan diberikan kepada setiap orang.

b. Kandungan Q.S. Al-Qamar (54) ayat 49

Selanjutnya dalam rangka *pengaturan* dan *kadar* yang ditetapkan oleh Allah atas segala sesuatu itu, kita melihat bahwa setiap makhluk hidup diberi senjata untuk membentengi dirinya dalam melawan serangan musuh-musuhnya atau menghindari bahaya kepunahannya. Senjata itu beraneka ragam dan berbeda-beda antara satu dengan yang lain. Ular-ular kecil dilengkapi dengan racun atau kelincahan bergerak, sedang ular-ular besar mempunyai otot yang sangat kuat, tetapi jarang yang memiliki racun. Demikian seterusnya, sampai kepada manusia.

Tidak satu pun yang Allah ciptakan sia-sia atau tanpa tujuan yang benar dan kesemuanya diberi potensi yang sesuai dengan kadar yang cukup untuk melaksanakan fungsinya, dan semuanya kait berkait, tunjang menunjang dalam satu keseimbangan.[36]

3. Q.S. Al-Hijr(15) ayat 21

وَإِن مِّن شَيۡءٍ إِلَّا عِندَنَا خَزَآئِنُهُۥ وَمَا نُنَزِّلُهُۥٓ إِلَّا بِقَدَرٖ مَّعۡلُومٖ ٢١

Terjemahnya:

> "Dan tidak ada sesuatupun melainkan pada sisi kami-lah khazanahnya dan kami tidak menurunkannya melainkan dengan ukuran yang tertentu."[37]

---

[36] M. Quraish Shihab. *Tafsir Al-Misbah Volume 13*. (Cet. VIII; Jakarta: Lentera Hati, 2007), h. 482-483.

[37] M. Quraish Shihab. *Tafsir Al-Misbah Volume 7*. (Jakarta: Lentera Hati, 2007), h. 112

a. Tafsir Q.S. Al-Hijr(15) ayat 21

Ayat di atas menjelaskan bahwa Allah-lah pemilik segala-galanya. Dia-lah pemilik perbendaharaan rizki dari segala jenis makhluk-Nya. Sebagaimana yang Dia hendaki dan yang Dia inginkan berdasarkan hikmah yang sempurna dan rahmat-Nya kepada hamba.[38] Setelah menjelaskan bahwa segala anugerah rezeki bersumber semata-mata dari Allah swt., dan bahwa kadar rezeki yang diterima masing-masing berbeda-beda, ditegaskan-Nya bahwa *Dan tidak ada sesuatu pun* yang wujud di alam raya ini *melainkan pada sisi kami-lah* sendiri tidak sedikit pun disisi selain Allah *khazanahnya*; kami yang menciptakannya, menguasai dan juga membaginya sesuai dengan kehendak dan kebijaksanaan kami. *Kami tidak menurunkanya*, yakni menciptakan, menganugerahkan dan memberi makhluk kemampuan untuk menggunakan *melainkan dengan ukuran yang tertentu* sesuai dengan keadaan masing-masing makhluk.

b. Kandungan Q.S. Al-Hijr(15) ayat 21

M. Quraish Shihab cenderung memahami ayat diatas dalam pengertiannya yang umum mencakup segala anugerah Allah swt. yang diberikan-Nya baik kepada jenis makhluk maupun kepada setiap individu. Dalam konteks ini antara lain Allah swt. berfirman:

[38] Syaikh Shafiyurrahman al-Mubarakfuri. *Shahih Tafsir Ibnu Katsir*. (Jakarta: Pustaka Ibnu Katsir, 2011), h. 120

۞ وَلَوْ بَسَطَ ٱللَّهُ ٱلرِّزْقَ لِعِبَادِهِۦ لَبَغَوْا۟ فِى ٱلْأَرْضِ وَلَٰكِن يُنَزِّلُ بِقَدَرٍ
مَّا يَشَآءُ ۚ إِنَّهُۥ بِعِبَادِهِۦ خَبِيرٌۢ بَصِيرٌ ﴿٢٧﴾

Terjemahnya:

> “dan Jikalau Allah melapangkan rezki kepada hamba-hamba-Nya tentulah mereka akan melampaui batas di muka bumi, tetapi Allah menurunkan apa yang dikehendaki-Nya dengan ukuran. Sesungguhnya Dia Maha mengetahui (keadaan) hamba-hamba-Nya lagi Maha melihat”(QS asy-Syuraa(42): 27)

Ayat ini seperti diisyaratkan di atas tidak hanya terbatas pengertiaannya pada hal-hal yang bersifat material, tetapi juga yang immaterial, karena itu dapat juga dikatakan bahwa tidak ada ketenangan batin atau keresahan dan musibah yang menimpa manusia kecuali sesuai ketentuan yang telah ditetapkan Allah swt. dan sejalan dengan hikmah kebijaksanaan-Nya.[39]

4. Relevansi ayat dengan penelitian

Memandang ayat-ayat yang telah dipaparkan pada pembahasannya sebelumnya, yaitu terdapat tiga ayat yang umumnya menjelaskan tentang ukuran atau *qadar*, maka term *qadar* (ukuran) sangat erat kaitannya dengan pembahasan yang dikaji dalam ilmu matematika. Hal ini membuktikan bahwa ilmu matematika sangat berkaitan dengan ilmu agama, sebagai contoh kecil penjelasan tentang zakat, mawaris, jual beli, dll. Semua itu tak luput dari angka-angka dan ukuran yang dimaksud ke

[39] M. Quraish Shihab. *Tafsir Al-Misbah volume 7*. (Cet. VII; Jakarta: Lentera Hati, 2007), h. 112-114

dalam ayat-ayat tadi, contoh lain seperti pergantian siang malam, penentuan arah kiblat, jumlah rakaat, jumlah zikir, semua tak luput dari angka-angka dan ketetapan Allah swt. Dosa dan pahala saja dihitung dan ditimbang menurut ketentuan dan takdir Allah swt. yang kemudian dikenal dengan yaumul hisab dan yaumul mizan.

Berbicara tentang ukuran yang dimaksud dari ketiga ayat diatas maka pada judul Analisis Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dan Aplikasinya, yang kemudian dibentuk kedalam matriks tidak luput dari yang namanya ukuran serta angka. Sistem persamaan linear dapat terdiri/berukuran dari m persamaan dan n variabel $(m \times n)$ atau dapat terdiri dari n persamaan dan n variabel $(n \times n)$.

Metode Eliminasi Gauss dapat menyelesaikan sistem persamaan linear berukuran $m \times n$ dan $n \times n$, sedangkan Aturan Cramer dapat menyelesaikan sistem persamaan linear berukuran $n \times n$ saja. Kedua metode tersebut telah ada aturan-aturan (rumus) atau ketetapan yang telah ditentukan untuk mendapatkan solusi dari sistem persamaan linear. Jadi kesimpulan ketiga ayat di atas Q.S Al Furqan (25) ayat 2, Q.S Al Qamar (54) ayat 49, dan Q.S Al-Hijr (15) ayat 21 yang pada umumnya membahas ukuran/ketetapan Allah swt. ada kaitannya dengan judul Analisis Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear serta Aplikasinya.

BAB III
METODE PENELITIAN

A. *Jenis Penelitian*

Jenis penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*Library Research*) dengan mengumpulkan beberapa literatur baik berupa buku maupun jurnal yang berkaitan dengan penelitian ini.

B. *Lokasi dan Waktu Penelitian*

1. Lokasi Penelitian adalah perpustakaan UIN Alauddin Makassar yang memiliki buku-buku yang berkaitan dengan Matriks dan Sistem Persamaan Linear.
2. Waktu penelitian adalah dimulai bulan Mei sampai Agustus 2015.

C. *Prosedur Penelitian*

Untuk mencapai tujuan penelitian yang tertera pada pendahuluan, maka langkah-langkah yang ditempuh adalah sebagai berikut:

1. Langkah-langkah untuk membandingkan efektifitas Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer dalam menyelesaikan Sistem Persamaan Linear.
   a. Menyelesaikan sistem persamaan linear dengan dua metode, yaitu Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer.
      1) Untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dengan Metode Eliminasi Gauss.
         a) Menetukan matriks A dari sistem persamaan linear yang telah ada.

b) Mencari kolom dari kiri yang berisi entri tidak nol, entri tidak nol dalam baris pertama adalah satu.

c) Bila entri baris pertama kolom pertama tidak sama dengan satu, maka dilakukan operasi baris elementer pada baris tersebut.

d) Kemudian entri di bawah baris pertama kolom pertama dibuat nol.

e) Mencari baris kedua kolom kedua yang berisi entri tidak nol, entri tidak nol dalam baris kedua kolom kedua adalah satu.

f) Kemudian entri di bawah baris kedua kolom kedua dibuat nol.

g) Mencari baris ketiga kolom ketiga yang berisi entri tidak nol, entri tidak nol dalam baris ketiga kolom ketiga adalah satu.

h) Jika matriks sudah dalam bentuk matriks segitiga atas. Selanjutnya akan dilakukan subtitusi balik untuk memperoleh penyelesaian sistem.

2) Untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dengan Aturan Cramer.

a) Menentukan matriks A, x dan B dari sistem persamaan linear yang telah ada.

b) Untuk menetukan matriks A_1, kolom pertama pada matriks A diganti dengan nilai dari matriks B. Untuk matriks A_2, kolom kedua pada matriks A diganti dengan nilai dari matriks B. Begitu seterusnya sampai A_n.

c) Mencari nilai determinan dari matriks $A_1, A_2, \dots, A_n$ dengan Metode Salihu. Selanjutnya nilai detetminan dari matriks $\boldsymbol{A_1}$ dan $\boldsymbol{A}$ disubtitusi kepersamaan $x_1 = \frac{det(A_1)}{det(\boldsymbol{A})}$, untuk mendapatkan solusi x_1. Untuk matriks A_2 dan A disubtitusi kepersamaan $x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}$, untuk mendapatkan solusi x_2. Proses tersebut dilakukan untuk memperoleh solusi sampai x_n untuk matriks A_n.

d) Nilai x merupakan solusi penyelesaian sistem persamaan linear.

b. Membandingkan hasil Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer untuk mendapatkan metode yang lebih efektif. Perbandingan ini dapat dilihat dari banyaknya langkah penyelesaian, kecepatan, dan ketepatan mendapat solusi dari sistem.

c. Membuat kesimpulan.

2. Langkah-langkah untuk membandingkan keefektifitasan Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer dalam menentukan jumlah produksi pada *Product Mix Problem.*

a. Mengambil data.

b. Membuat tabel *Product Mix Problem*.

c. Menentukan sistem persamaan linear.

d. Menyelesaikan sistem persamaan linear dengan Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer.

e. Membuat kesimpulan.

BAB IV
HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

A. *Hasil Penelitian*

1. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dengan Menggunakan Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer

a. Metode Eliminasi Gauss

Menentukan solusi penyelesaian sistem persamaan linear dengan Metode Eliminasi Gauss, digunakan langkah-langkah yang berlaku secara umum, sehingga dalam penyelesaiannya dapat dikerjakan secara konsisten. Sistem persamaan linear tersebut dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} & \dots & a_{3n} & a_{3n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

Matriks di atas dibawa kebentuk matriks segitiga atas sehingga menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3n} & a_{3n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

Setelah matriks berbentuk segitiga atas dapat dilakukan subtitusi balik, sehingga diperoleh solusi persamaan linear.

Contoh 4.1.3

Selesaikan sistem persamaan linear berikut!

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \qquad\quad + x_6 &= 10 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \qquad\quad &= 12 \\
3x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 &= 14 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 &= 16 \\
2x_1 + x_2 \qquad + x_4 + 2x_5 + 2x_6 &= 18 \\
x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 + 3x_6 &= 20
\end{aligned}
$$

1) Menentukan matriks A dari sistem persamaan linear di atas.

$$
A = \begin{bmatrix}
1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 10 \\
2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 12 \\
0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 14 \\
1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 16 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 18 \\
0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 20
\end{bmatrix}
$$

2) Karena entri baris pertama kolom pertama adalah satu, maka selanjutnya di bawah baris pertama kolom pertama dibuat nol.

   Untuk baris kedua: baris pertama dikalikan -2 kemudian ditambahkan baris kedua.

   Untuk baris keempat: baris pertama dikalikan -1 kemudian ditambahkan baris keempat.

   Untuk baris kelima: baris pertama dikalikan -2 kemudian ditambahkan baris kelima. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & -6 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -4 & -7 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 20 \end{bmatrix}$$

3) Entri tidak nol dalam baris kedua kolom kedua dijadikan satu.

Untuk baris kedua: baris kedua dikalikan $-\frac{1}{2}$. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3 & -1/2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -4 & -7 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 20 \end{bmatrix}$$

4) Entri dibawah baris kedua kolom kedua dibuat nol.

Untuk baris ketiga: baris kedua dikalikan -3 kemudian ditambahkan baris ketiga.

Untuk baris kelima: baris kedua dikalikan 3 kemudian ditambahkan baris kelima.

Untuk baris keenam: baris kedua dikalikan -1 kemudian ditambahkan baris keenam. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3 & -1/2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -7/2 & -6 & 7/2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2 & 1/2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1 & 3/2 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$

5) Entri tidak nol dalam baris ketiga kolom ketiga dijadikan satu.

Untuk baris ketiga: baris ketiga dikalikan $-\frac{2}{7}$. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3 & -1/2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 12/7 & -1 & 0 & -4/7 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2 & 1/2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1 & 3/2 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$

6) Entri dibawah baris ketiga kolom ketiga dibuat nol.

Untuk baris keempat: baris ketiga dikalikan 1 kemudian ditambahkan baris keempat.

Untuk baris kelima: baris ketiga dikalikan $-\frac{1}{2}$ kemudian ditambahkan baris kelima.

Untuk baris keenam: baris ketiga dikalikan $-\frac{3}{2}$ kemudian ditambahkan baris keenam. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3 & -1/2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 12/7 & -1 & 0 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & -9/7 & 1 & 0 & 38/7 \\ 0 & 0 & 0 & 8/7 & 1 & 3 & 72/7 \\ 0 & 0 & 0 & -11/7 & 3 & 2 & 118/7 \end{bmatrix}$$

7) Entri tidak nol dalam baris keempat kolom keempat dijadikan satu.

Untuk baris keempat: baris keempat dikalikan $-\frac{7}{9}$. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3 & -1/2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 12/7 & -1 & 0 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/9 & 0 & -38/9 \\ 0 & 0 & 0 & 8/7 & 1 & 3 & 72/7 \\ 0 & 0 & 0 & -11/7 & 3 & 2 & 118/7 \end{bmatrix}$$

8) Entri dibawah baris ketiga kolom ketiga dibuat nol.

Untuk baris kelima: baris keempat dikalikan $-\frac{8}{7}$ kemudian ditambahkan baris kelima.

Untuk baris keenam: baris keempat dikalikan $\frac{11}{7}$ kemudian ditambahkan baris keenam. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3 & -1/2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 12/7 & -1 & 0 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/9 & 0 & -38/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17/9 & 3 & 136/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16/9 & 2 & 92/9 \end{bmatrix}$$

9) Entri tidak nol dalam baris kelima kolom kelima dijadikan satu.

Untuk baris kelima: baris kelima dikalikan $\frac{9}{17}$. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3 & -1/2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 12/7 & -1 & 0 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/9 & 0 & -38/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 27/17 & 136/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16/9 & 2 & 92/9 \end{bmatrix}$$

10) Entri dibawah baris kelima kolom kelima dibuat nol.

Untuk baris keenam: baris kelima dikalikan $-\frac{16}{9}$ kemudian ditambahkan baris keenam. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3 & -1/2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 12/7 & -1 & 0 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/9 & 0 & -38/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 27/17 & 136/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14/17 & -68/17 \end{bmatrix}$$

11) Entri tidak nol dalam baris keenam kolom keenam dijadikan satu.

Untuk baris keenam: baris keenam dikalikan $-\frac{17}{14}$. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3 & -1/2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 12/7 & -1 & 0 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/9 & 0 & -38/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 27/17 & 136/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 34/7 \end{bmatrix}$$

12) Matriks di atas sudah dalam bentuk matriks segitiga atas, sehingga diperoleh sistem pesamaan linear sebagai berikut:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \qquad + \ x_6 = 10$$

$$x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 3x_4 - \frac{1}{2}x_5 + x_6 = 4$$

$$x_3 + \frac{12}{7}x_4 - x_5 \qquad = -\frac{4}{7}$$

$$x_4 - \frac{7}{9}x_5 \qquad = -\frac{38}{9}$$

$$x_5 + \frac{27}{17}x_6 = \frac{136}{17}$$

$$x_6 = \frac{34}{7}$$

13) Melakukan subtitusi balik untuk memperoleh solusi sistem persamaan linear.

$x_1 = \frac{36}{7}$

$x_2 = \frac{10}{7}$

$x_3 = \frac{46}{7}$

$x_4 = -4$

$x_5 = \frac{2}{7}$

$x_6 = \frac{34}{7}$

jadi, solusi sistem persamaan linear di atas adalah $\left(\frac{36}{7}, \frac{10}{7}, \frac{46}{7}, -4, \frac{2}{7}, \frac{34}{7}\right)$

b. Aturan Cramer

Menentukan solusi penyelesaian sistem persamaan linear dengan Aturan Cramer, digunakan langkah-langkah yang berlaku secara umum, sehingga dalam penyelesaiannya dapat dikerjakan secara konsisten. Secara umum aturan cramer memiliki penyelesaian:

$$Ax = B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Maka sistem persamaan linear di atas mempunyai penyelesaian tunggal dan penyelesaiannya adalah:

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, \qquad x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}, \dots, \qquad x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$$

Matriks bujur sangkar diatas, di pecah menjadi:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{sebagai matriks } A$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{sebagai matriks } A_1$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ sebagai matriks A_2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ sebagai matrik A_3

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n \end{bmatrix}$$ sebagai matriks A_n

Metode ini akan digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear n persamaan dan n variabel, dengan $n = 6$.

Contoh 4.1.3

Selesaikan sistem persamaan linear berikut!

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_6 = 10$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 12$$

$$3x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 14$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 16$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 18$$

$$x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 + 3x_6 = 20$$

1) Menentukan matrik A, x dan B dari sistem persamaan linear diatas.

$Ax = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 14 \\ 16 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix}$$

2) Menetukan matriks A_1, A_2, A_3, A_4, A_5dan A_6.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 12 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 14 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 16 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 18 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 20 & 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 12 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 16 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 18 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 20 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 14 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 16 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 18 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 20 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 10 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 12 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 14 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 16 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 18 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 20 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 14 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 16 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 18 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 20 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 10 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 14 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 18 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 20 \end{bmatrix}$$

3) Menentukan determinan matriks A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, dan A_6 dengan metode salihu.

a) Menentukan determinan matriks A

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

1) Menentukan determinan interior

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 1$$

2) Menentukan determinan unik.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} -9 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -17$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 11$$

$$|E| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = -\frac{1}{1}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 25 & -17 \end{vmatrix} = -43$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -17 & -6 \end{vmatrix} = 27$$

$$\det(A) = \frac{1}{|B|} \cdot \begin{Vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{Vmatrix} = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} -17 & 11 \\ -43 & 27 \end{vmatrix} = 14$$

b) Menentukan determinan matriks A_1

$$\det(A_1) = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 12 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 14 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 16 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 18 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 20 & 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 12 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 14 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 16 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 18 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 14 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 16 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 18 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 20 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

1) Menentukan determinan interior

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 1$$

2) Menentukan determinan unik

$$|C| = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 12 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 14 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 16 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 18 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 2 & 4 \\ 12 & 2 & 1 & 2 \\ 14 & 3 & 1 & 3 \\ 16 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 & 2 \\ 14 & 3 & 1 & 3 \\ 16 & 2 & 1 & 1 \\ 18 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -16 & 1 \end{vmatrix} = -34$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 11$$

$$|E| = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 14 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 16 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 18 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 20 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 & 2 \\ 14 & 3 & 1 & 3 \\ 16 & 2 & 1 & 1 \\ 18 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 14 & 3 & 1 & 3 \\ 16 & 2 & 1 & 1 \\ 18 & 1 & 0 & 1 \\ 20 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = -\frac{1}{1} \begin{vmatrix} -16 & 1 \\ 182 & -17 \end{vmatrix} = -90$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -17 & -6 \end{vmatrix} = 27$$

$$\det(A_1) = \frac{1}{|B|} \cdot \begin{Vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{Vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} -34 & 11 \\ -90 & 27 \end{vmatrix} = 72$$

c) Menentukan determinan matriks A_2

$$\det(A_2)=\begin{vmatrix}1&10&2&4&0&1\\2&12&1&2&1&0\\0&14&1&3&2&3\\1&16&1&1&2&1\\2&18&0&1&2&2\\0&20&3&4&1&3\end{vmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix}12&1&2&1\\14&1&3&2\\16&1&1&2\\18&0&1&2\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}1&10&2&4&0\\2&12&1&2&1\\0&14&1&3&2\\1&16&1&1&2\\2&18&0&1&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}10&2&4&0&1\\12&1&2&1&0\\14&1&3&2&3\\16&1&1&2&1\\18&0&1&2&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&12&1&2&1\\0&14&1&3&2\\1&16&1&1&2\\2&18&0&1&2\\0&20&3&4&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}12&1&2&1&0\\14&1&3&2&3\\16&1&1&2&1\\18&0&1&2&2\\20&3&4&1&3\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

1) Menentukan determinan interior

$$|B|=\begin{vmatrix}12&1&2&1\\14&1&3&2\\16&1&1&2\\18&0&1&2\end{vmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}12&1&2\\14&1&3\\16&1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2&1\\1&3&2\\1&1&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}14&1&3\\16&1&1\\18&0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&3&2\\1&1&2\\0&1&2\end{vmatrix}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}6&2\\-38&-4\end{vmatrix}=-26$$

2) Menentukan determinan unik

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 12 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 14 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 16 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 18 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 12 & 1 & 2 \\ 14 & 1 & 3 \\ 16 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 10 & 2 & 4 \\ 2 & 12 & 1 & 2 \\ 0 & 14 & 1 & 3 \\ 1 & 16 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 10 & 2 & 4 & 0 \\ 12 & 1 & 2 & 1 \\ 14 & 1 & 3 & 2 \\ 16 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 12 & 1 & 2 \\ 0 & 14 & 1 & 3 \\ 1 & 16 & 1 & 1 \\ 2 & 18 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 12 & 1 & 2 & 1 \\ 14 & 1 & 3 & 2 \\ 16 & 1 & 1 & 2 \\ 18 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -60 & -16 \\ -72 & -26 \end{vmatrix} = 68$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 12 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 14 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 16 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 18 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 4 & 0 \\ 12 & 1 & 2 & 1 \\ 14 & 1 & 3 & 2 \\ 16 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 12 & 1 & 2 & 1 \\ 14 & 1 & 3 & 2 \\ 16 & 1 & 1 & 2 \\ 18 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -16 & -10 \\ -26 & -6 \end{vmatrix} = -82$$

$$|E| = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 14 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 16 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 18 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 20 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 14 & 1 & 3 \\ 16 & 1 & 1 \\ 18 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 12 & 1 & 2 \\ 0 & 14 & 1 & 3 \\ 1 & 16 & 1 & 1 \\ 2 & 18 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 12 & 1 & 2 & 1 \\ 14 & 1 & 3 & 2 \\ 16 & 1 & 1 & 2 \\ 18 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 14 & 1 & 3 \\ 1 & 16 & 1 & 1 \\ 2 & 18 & 0 & 1 \\ 0 & 20 & 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 14 & 1 & 3 & 2 \\ 16 & 1 & 1 & 2 \\ 18 & 0 & 1 & 2 \\ 20 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = -\frac{1}{38} \begin{vmatrix} -72 & -26 \\ 40 & 82 \end{vmatrix} = 128$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 14 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 16 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 18 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 20 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 12 & 1 & 2 & 1 \\ 14 & 1 & 3 & 2 \\ 16 & 1 & 1 & 2 \\ 18 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 14 & 1 & 3 & 2 \\ 16 & 1 & 1 & 2 \\ 18 & 0 & 1 & 2 \\ 20 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} -26 & -6 \\ 82 & -6 \end{vmatrix} = -162$$

$$\det(A_2) = \frac{1}{|B|} \cdot \begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix} = -\frac{1}{26}\begin{vmatrix} 68 & -82 \\ 128 & -162 \end{vmatrix} = 20$$

d) Menentukan determinan matriks A_3

$$\det(A_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 14 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 16 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 18 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 20 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 12 & 2 & 1 \\ 3 & 14 & 3 & 2 \\ 2 & 16 & 1 & 2 \\ 1 & 18 & 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 12 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 14 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 16 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 18 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 10 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 12 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 14 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 16 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 18 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 12 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 14 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 16 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 18 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 20 & 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 12 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 14 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 16 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 18 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 20 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

1) Menentukan determinan interior

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 2 & 1 \\ 3 & 14 & 3 & 2 \\ 2 & 16 & 1 & 2 \\ 1 & 18 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 16 & 1 \end{vmatrix}} \left\| \begin{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 12 & 2 \\ 3 & 14 & 3 \\ 2 & 16 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 \\ 14 & 3 & 2 \\ 16 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 14 & 3 \\ 2 & 16 & 1 \\ 1 & 18 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 14 & 3 & 2 \\ 16 & 1 & 2 \\ 18 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{matrix} \right\| = -\frac{1}{34} \begin{vmatrix} 8 & 22 \\ 40 & 8 \end{vmatrix} = 24$$

2) Menentukan determinan unik

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 12 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 14 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 16 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 18 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 12 & 2 \\ 3 & 14 & 3 \\ 2 & 16 & 1 \end{vmatrix}} \left\| \begin{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 & 4 \\ 2 & 2 & 12 & 2 \\ 0 & 3 & 14 & 3 \\ 1 & 2 & 16 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 10 & 4 & 0 \\ 2 & 12 & 2 & 1 \\ 3 & 14 & 3 & 2 \\ 2 & 16 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 12 & 2 \\ 0 & 3 & 14 & 3 \\ 1 & 2 & 16 & 1 \\ 2 & 1 & 18 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 12 & 2 & 1 \\ 3 & 14 & 3 & 2 \\ 2 & 16 & 1 & 2 \\ 1 & 18 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} -60 & -14 \\ 64 & 24 \end{vmatrix} = -68$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 12 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 14 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 16 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 18 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 \\ 14 & 3 & 2 \\ 16 & 1 & 2 \end{vmatrix}} \left\| \begin{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 10 & 4 & 0 \\ 2 & 12 & 2 & 1 \\ 3 & 14 & 3 & 2 \\ 2 & 16 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 10 & 4 & 0 & 1 \\ 12 & 2 & 1 & 0 \\ 14 & 3 & 2 & 3 \\ 16 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 12 & 2 & 1 \\ 3 & 14 & 3 & 2 \\ 2 & 16 & 1 & 2 \\ 1 & 18 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 14 & 3 & 2 & 3 \\ 16 & 1 & 2 & 1 \\ 18 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{22} \begin{vmatrix} -14 & -46 \\ 24 & 38 \end{vmatrix} = 26$$

$$|E| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 12 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 14 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 16 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 18 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 20 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 14 & 3 \\ 2 & 16 & 1 \\ 1 & 18 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 12 & 2 \\ 0 & 3 & 14 & 3 \\ 1 & 2 & 16 & 1 \\ 2 & 1 & 18 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 12 & 2 & 1 \\ 3 & 14 & 3 & 2 \\ 2 & 16 & 1 & 2 \\ 1 & 18 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 & 14 & 3 \\ 1 & 2 & 16 & 1 \\ 2 & 1 & 18 & 1 \\ 0 & 1 & 20 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 14 & 3 & 2 \\ 2 & 16 & 1 & 2 \\ 1 & 18 & 1 & 2 \\ 1 & 20 & 4 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{40} \begin{vmatrix} 64 & 24 \\ 92 & -48 \end{vmatrix} = -132$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 14 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 16 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 18 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 20 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 14 & 3 & 2 \\ 16 & 1 & 2 \\ 18 & 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 12 & 2 & 1 \\ 3 & 14 & 3 & 2 \\ 2 & 16 & 1 & 2 \\ 1 & 18 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 14 & 3 & 2 & 3 \\ 16 & 1 & 2 & 1 \\ 18 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 14 & 3 & 2 \\ 2 & 16 & 1 & 2 \\ 1 & 18 & 1 & 2 \\ 1 & 20 & 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 14 & 3 & 2 & 3 \\ 16 & 1 & 2 & 1 \\ 18 & 1 & 2 & 2 \\ 20 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 24 & 38 \\ -48 & -70 \end{vmatrix} = 18$$

$$\det(A_3) = \frac{1}{|B|} \cdot \begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix} = \frac{1}{24} \begin{vmatrix} -68 & 26 \\ -132 & 18 \end{vmatrix} = 92$$

e) Menentukan determinan matriks A_4

$$\det(A_4)=\begin{vmatrix}1&2&2&10&0&1\\2&2&1&12&1&0\\0&3&1&14&2&3\\1&2&1&16&2&1\\2&1&0&18&2&2\\0&1&3&20&1&3\end{vmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix}2&1&12&1\\3&1&14&2\\2&1&16&2\\1&0&18&2\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&2&10&0\\2&2&1&12&1\\0&3&1&14&2\\1&2&1&16&2\\2&1&0&18&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&2&10&0&1\\2&1&12&1&0\\3&1&14&2&3\\2&1&16&2&1\\1&0&18&2&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&2&1&12&1\\0&3&1&14&2\\1&2&1&16&2\\2&1&0&18&2\\0&1&3&20&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1&12&1&0\\3&1&14&2&3\\2&1&16&2&1\\1&0&18&2&2\\1&3&20&1&3\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

1) Menentukan determinan interior

$$|B|=\begin{vmatrix}2&1&12&1\\3&1&14&2\\2&1&16&2\\1&0&18&2\end{vmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1&14\\1&16\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}2&1&12\\3&1&14\\2&1&16\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&12&1\\1&14&2\\1&16&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}3&1&14\\2&1&16\\1&0&18\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&14&2\\1&16&2\\0&18&2\end{vmatrix}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-4&-2\\20&4\end{vmatrix}=12$$

2) Menentukan determinan unik

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 10 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 12 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 14 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 16 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 18 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 \\ 3 & 1 & 14 \\ 2 & 1 & 16 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 10 \\ 2 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & 14 \\ 1 & 2 & 1 & 16 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 12 & 1 \\ 3 & 1 & 14 & 2 \\ 2 & 1 & 16 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & 14 \\ 1 & 2 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 18 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 & 1 \\ 3 & 1 & 14 & 2 \\ 2 & 1 & 16 & 2 \\ 1 & 0 & 18 & 2 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 38 & 10 \\ 32 & 12 \end{vmatrix} = -34$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 12 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 14 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 16 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 18 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 1 & 14 & 2 \\ 1 & 16 & 2 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 12 & 1 \\ 3 & 1 & 14 & 2 \\ 2 & 1 & 16 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 10 & 0 & 1 \\ 1 & 12 & 1 & 0 \\ 1 & 14 & 2 & 3 \\ 1 & 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 & 1 \\ 3 & 1 & 14 & 2 \\ 2 & 1 & 16 & 2 \\ 1 & 0 & 18 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 0 \\ 1 & 14 & 2 & 3 \\ 1 & 16 & 2 & 1 \\ 0 & 18 & 2 & 2 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 10 & -6 \\ 12 & -20 \end{vmatrix} = 64$$

$$|E| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 12 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 14 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 16 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 18 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 20 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 14 \\ 2 & 1 & 16 \\ 1 & 0 & 18 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & 14 \\ 1 & 2 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 18 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 & 1 \\ 3 & 1 & 14 & 2 \\ 2 & 1 & 16 & 2 \\ 1 & 0 & 18 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 14 \\ 1 & 2 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 3 & 20 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 & 14 & 2 \\ 2 & 1 & 16 & 2 \\ 1 & 0 & 18 & 2 \\ 1 & 3 & 20 & 1 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \frac{1}{20}\begin{vmatrix} 32 & 12 \\ 46 & -24 \end{vmatrix} = -66$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 14 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 16 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 18 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 20 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 14 & 2 \\ 1 & 16 & 2 \\ 0 & 18 & 2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 & 1 \\ 3 & 1 & 14 & 2 \\ 2 & 1 & 16 & 2 \\ 1 & 0 & 18 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 0 \\ 1 & 14 & 2 & 3 \\ 1 & 16 & 2 & 1 \\ 0 & 18 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 14 & 2 \\ 2 & 1 & 16 & 2 \\ 1 & 0 & 18 & 2 \\ 1 & 3 & 20 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 14 & 2 & 3 \\ 1 & 16 & 2 & 1 \\ 0 & 18 & 2 & 2 \\ 3 & 20 & 1 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 12 & -20 \\ -24 & 88 \end{vmatrix} = 144$$

$$\det(A_4) = \frac{1}{|B|} \cdot \begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix} = -\frac{1}{12} \begin{vmatrix} -34 & 64 \\ -66 & 144 \end{vmatrix} = -56$$

f) Menentukan determinan matriks A_5

$$\det(A_5) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 14 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 16 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 18 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 20 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & 18 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 10 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 14 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 18 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 12 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 14 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 16 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 18 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 14 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 20 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 12 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 14 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 16 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 18 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 20 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

1) Menentukan determinan interior

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & 18 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 1 & 3 & 14 \\ 1 & 1 & 16 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 14 \\ 1 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 18 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -38 \end{vmatrix} = 16$$

2) Menentukan determinan unik

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 10 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 14 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 18 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & 16 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & 18 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} -9 & 2 \\ -4 & 16 \end{vmatrix} = -136$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 12 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 14 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 16 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 18 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 1 & 3 & 14 \\ 1 & 1 & 16 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & 16 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 1 & 3 & 14 & 3 \\ 1 & 1 & 16 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & 18 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 & 0 \\ 1 & 3 & 14 & 3 \\ 1 & 1 & 16 & 1 \\ 0 & 1 & 18 & 2 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & -62 \\ 16 & -70 \end{vmatrix} = 142$$

$$|E| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 14 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 20 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & 18 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & 18 \\ 1 & 3 & 4 & 20 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = -\frac{1}{1} \begin{vmatrix} -4 & 16 \\ 25 & -182 \end{vmatrix} = -328$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 12 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 14 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 16 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 18 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 20 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 14 \\ 1 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 18 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & 18 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 & 0 \\ 1 & 3 & 14 & 3 \\ 1 & 1 & 16 & 1 \\ 0 & 1 & 18 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & 18 \\ 1 & 3 & 4 & 20 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 14 & 3 \\ 1 & 1 & 16 & 1 \\ 0 & 1 & 18 & 2 \\ 3 & 4 & 20 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = -\frac{1}{38} \begin{vmatrix} 16 & -70 \\ -182 & -16 \end{vmatrix} = 342$$

$$\det(A_5) = \frac{1}{|B|} \cdot \begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix} = \frac{1}{16} \begin{vmatrix} -136 & 142 \\ -328 & 342 \end{vmatrix} = 4$$

g) Menentukan determinan matriks A_6

$$\det(A_6)=\begin{bmatrix}1&2&2&4&0&10\\2&2&1&2&1&12\\0&3&1&3&2&14\\1&2&1&1&2&16\\2&1&0&1&2&18\\0&1&3&4&1&20\end{bmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix}2&1&2&1\\3&1&3&2\\2&1&1&2\\1&0&1&2\end{vmatrix}}\begin{Vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&2&4&0\\2&2&1&2&1\\0&3&1&3&2\\1&2&1&1&2\\2&1&0&1&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&2&4&0&10\\2&1&2&1&12\\3&1&3&2&14\\2&1&1&2&16\\1&0&1&2&18\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&2&1&2&1\\0&3&1&3&2\\1&2&1&1&2\\2&1&0&1&2\\0&1&3&4&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1&2&1&12\\3&1&3&2&14\\2&1&1&2&16\\1&0&1&2&18\\1&3&4&1&20\end{vmatrix}\end{Vmatrix}$$

1) Menentukan determinan interior

$$|B|=\begin{vmatrix}2&1&2&1\\3&1&3&2\\2&1&1&2\\1&0&1&2\end{vmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}}\begin{Vmatrix}\begin{vmatrix}2&1&2\\3&1&3\\2&1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2&1\\1&3&2\\1&1&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}3&1&3\\2&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&3&2\\1&1&2\\0&1&2\end{vmatrix}\end{Vmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&2\\-1&-4\end{vmatrix}=1$$

2) Menentukan determinan unik

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} -9 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -17$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 12 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 18 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 12 \\ 1 & 3 & 2 & 14 \\ 1 & 1 & 2 & 16 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 1 & 3 & 2 & 14 \\ 1 & 1 & 2 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 18 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 16 \\ 1 & 26 \end{vmatrix} = -34$$

$$|E| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = -\frac{1}{1} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 25 & -17 \end{vmatrix} = -43$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 12 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 18 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 20 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 1 & 3 & 2 & 14 \\ 1 & 1 & 2 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 18 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 14 \\ 1 & 1 & 2 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 18 \\ 3 & 4 & 1 & 20 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 26 \\ -17 & -82 \end{vmatrix} = -90$$

$$\det(A_6) = \frac{1}{|B|} \cdot \begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} -17 & -34 \\ -43 & -90 \end{vmatrix} = 68$$

4) Mencari solusi penyelesaian sistem persamaan linear yaitu nilai dari x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, dan x_6.

a) Menentukan solusi untuk x_1

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{72}{14} = \frac{36}{7}$$

b) Menentukan solusi untuk x_2

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{20}{14} = \frac{10}{7}$$

c) Menentukan solusi untuk x_3

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{92}{14} = \frac{46}{7}$$

d) Menentukan solusi untuk x_4

$$x_4 = \frac{\det(A_4)}{\det(A)} = -\frac{56}{14} = -4$$

e) Menentukan solusi untuk x_5

$$x_5 = \frac{\det(A_5)}{\det(A)} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

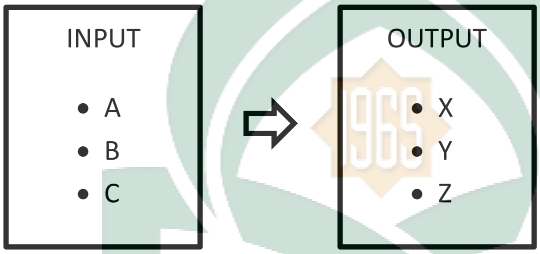
f) Menentukan solusi untuk x_6

$$x_6 = \frac{\det(A_6)}{\det(A)} = \frac{68}{14} = \frac{34}{7}$$

Jadi, solusi sistem persamaan linear di atas adalah $\left(\frac{36}{7}, \frac{10}{7}, \frac{46}{7}, -4, \frac{2}{7}, \frac{34}{7}\right)$

2. Aplikasi penyelesaian Sistem Persamaan Linear dengan Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer pada Bidang Ekonomi khususnya dalam *Product Mix Problem*

Permasalahan *Product Mix Problem* berkaitan dengan penentuan berapa unit masing-masing produk yang akan dihasilkan dengan menggunakan source (input) yang sama. Secara skematik dapat dilihat pada gambar berikut ini:



Permasalahan: berapa masing-masing output yang harus diproduksi dengan menggunakan input yang sama.

Contoh 4.2.1:

Suatu perusahaan mendapat pesanan produk 1 (x_1), produk 2 (x_2), produk (x_3), produk 4 (x_4). Dalam proses pengerjaannya setiap produk harus melalui beberapa proses pengerjaan, yaitu pemasangan kawat, pengeboran, perakitan dan pemeriksaan yang memiliki kapasitas produksi masing-masing 1500 jam, 2350 jam, 2600 jam dan 1200 jam.

produk 1 membutuhkan waktu $1/2$ jam pemasangan kawat, 3 jam pengeboran, 2 jam perakitan dan $1/2$ jam pemeriksaan.

produk 2 membutuhkan waktu $3/2$ jam pemasangan kawat, 1 jam pengeboran, 4 jam perakitan dan 1 jam pemeriksaan.

produk 3 membutuhkan waktu $3/2$ jam pemasangan kawat, 2 jam pengeboran, 1 jam perakitan dan $1/2$ jam pemeriksaan.

produk 4 membutuhkan waktu 1 jam pemasangan kawat, 3 jam pengeboran, 2 jam perakitan dan $1/2$ jam pemeriksaan.

Berapa masing-masing produk yang harus dihasilkan?

1) Membuat tabel *Product Mix Problem*

Proses	Produk				Kapasitas
	1 (x_1)	2 (x_2)	3 (x_3)	4 (x_4)	
Pemasangan Kawat	$1/2$	$3/2$	$3/2$	1	1500
Pengeboran	3	1	2	3	2350
Perakitan	2	4	1	2	2600
Pemeriksaan	$1/2$	1	$1/2$	$1/2$	1200

2) Membuat sistem persamaan linear

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 1500$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2350$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 2600$$

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 1200$$

3) Menentukan matriks A dari sistem persamaan linear diatas.

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 & 3/2 & 1 & 1500 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 2350 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 2600 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1200 \end{bmatrix}$$

a. Metode Eliminasi Gauss.

1) Entri tidak nol dalam baris pertama kolom pertama dijadikan satu.

Untuk baris pertama: baris pertama dikalikan 2. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 3000 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 2350 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 2600 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1200 \end{bmatrix}$$

2) Entri dibawah baris pertama kolom pertama dibuat nol.

Untuk baris kedua: baris pertama dikaikan -3 kemudian ditambahkan baris kedua.

Untuk baris ketiga: baris pertama dikalikan -2 kemudian ditambahkan baris ketiga.

Untuk baris keempat: baris pertama dikalikan $-\frac{1}{2}$ kemudian ditambahkan baris keempat. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 3000 \\ 0 & -8 & -7 & -3 & -6650 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & -3400 \\ 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & -300 \end{bmatrix}$$

3) Entri tidak nol dalam baris kedua kolom kedua dijadikan satu.

Untuk baris kedua: baris kedua dikalikan $-\frac{1}{8}$. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 3000 \\ 0 & 1 & 7/8 & 3/8 & 6650/8 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & -3400 \\ 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & -300 \end{bmatrix}$$

4) Entri dibawah baris kedua kolom kedua dibuat nol.

Untuk baris ketiga: baris kedua dikalikan 2 kemudian ditambahkan baris ketiga.

Untuk baris keempat: baris kedua dikalikan $\frac{1}{2}$ kemudian ditambahkan baris keempat. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 3000 \\ 0 & 1 & 7/8 & 3/8 & 6650/8 \\ 0 & 0 & -13/4 & -5/4 & -3475/2 \\ 0 & 0 & -9/16 & -5/16 & 925/8 \end{bmatrix}$$

5) Entri tidak nol dalam baris ketiga kolom ketiga dijadikan satu.

Untuk baris ketiga: baris ketiga dikalikan $-\frac{4}{13}$. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 3000 \\ 0 & 1 & 7/8 & 3/8 & 6650/8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/13 & 6950/13 \\ 0 & 0 & -9/16 & -5/16 & 925/8 \end{bmatrix}$$

6) Entri dibawah baris ketiga kolom ketiga dibuat nol.

Untuk baris keempat: baris ketiga dikalikan $\frac{9}{16}$ kemudian ditambahkan baris keempat. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 3000 \\ 0 & 1 & 7/8 & 3/8 & 6650/8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/13 & 6950/13 \\ 0 & 0 & 0 & -5/52 & 10825/26 \end{bmatrix}$$

7) Entri tidak nol dalam baris keempat kolom keempat dijadikan satu.

   Untuk baris keempat: baris keempat dikalikan $-\frac{52}{5}$. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 3000 \\ 0 & 1 & 7/8 & 3/8 & 6650/8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/13 & 6950/13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4330 \end{bmatrix}$$

8) Matriks diatas sudah dalam bentuk matriks segitiga atas, sehingga diperoleh sistem pesamaan linear sebagai berikut:

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3000$$

$$x_2 + \frac{7}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 = \frac{6650}{8}$$

$$x_3 + \frac{5}{13}x_4 = \frac{6950}{13}$$

$$x_4 = 4330$$

9) Melakukan subtitusi balik untuk memperoleh solusi sistem persamaan linear.

   $x_1 = 3470$

   $x_2 = 530$

   $x_3 = 2200$

   $x_4 = 4330$

Jadi, banyaknya masing-masing produk yang akan diproduksi adalah produk $1 = 3470$ unit, produk $2 = 530$ unit, produk $3 = 2200$ dan produk $4 = 4330$ unit.

b. Aturan Cramer.

1) Menentukan matrik A, x dan B dari sistem persamaan linear diatas.

$Ax = B$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 & 3/2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1500 \\ 2350 \\ 2600 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

2) Menentukan matriks A_1, A_2, A_3 dan A_4

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1500 & 3/2 & 3/2 & 1 \\ 2350 & 1 & 2 & 3 \\ 2600 & 4 & 1 & 2 \\ 1200 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1500 & 3/2 & 1 \\ 3 & 2350 & 2 & 3 \\ 2 & 2600 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1200 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 & 1500 & 1 \\ 3 & 1 & 2350 & 3 \\ 2 & 4 & 2600 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1200 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 & 3/2 & 1500 \\ 3 & 1 & 2 & 2350 \\ 2 & 4 & 1 & 2600 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1200 \end{bmatrix}$$

3) Menentukan determinan matriks A, A_1, A_2, A_3 dan A_4 dengan metode salihu.

a) Menentukan determinan matriks A

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 & 3/2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3/2 & 3/2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{7} \begin{vmatrix} 13 & 19/2 \\ 5/2 & 5/2 \end{vmatrix} = -\frac{5}{4}$$

b) Menentukan determinan matriks A_1

$$\det(A_1) = \begin{bmatrix} 1500 & 3/2 & 3/2 & 1 \\ 2350 & 1 & 2 & 3 \\ 2600 & 4 & 1 & 2 \\ 1200 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1500 & 3/2 & 3/2 \\ 2350 & 1 & 2 \\ 2600 & 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3/2 & 3/2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2350 & 1 & 2 \\ 2600 & 4 & 1 \\ 1200 & 1 & 1/2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{7} \begin{vmatrix} 3975 & 19/2 \\ -2150 & 5/2 \end{vmatrix} = -\frac{8675}{2}$$

c) Menentukan determinan matriks A_2

$$\det(A_2) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1500 & 3/2 & 1 \\ 3 & 2350 & 2 & 3 \\ 2 & 2600 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1200 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2350 & 2 \\ 2600 & 1 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1/2 & 1500 & 3/2 \\ 3 & 2350 & 2 \\ 2 & 2600 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1500 & 3/2 & 1 \\ 2350 & 2 & 3 \\ 2600 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2350 & 2 \\ 2 & 2600 & 1 \\ 1/2 & 1200 & 1/2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2350 & 2 & 3 \\ 2600 & 1 & 2 \\ 1200 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2850} \begin{vmatrix} 4725 & 3300 \\ 1325 & 1325 \end{vmatrix} = -\frac{1325}{2}$$

d) Menentukan determinan matriks A_3

$$\det(A_3) = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 & 1500 & 1 \\ 3 & 1 & 2350 & 3 \\ 2 & 4 & 2600 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1200 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2350 \\ 4 & 2600 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 1500 \\ 3 & 1 & 2350 \\ 2 & 4 & 2600 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3/2 & 1500 & 1 \\ 1 & 2350 & 3 \\ 4 & 2600 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2350 \\ 2 & 4 & 2600 \\ 1/2 & 1 & 1200 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2350 & 3 \\ 4 & 2600 & 2 \\ 1 & 1200 & 1/2 \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{6800} \begin{vmatrix} 6950 & 3550 \\ 5500 & 5500 \end{vmatrix} = -2750$$

e) Menentukan determinan matriks A_4

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 & 3/2 & 1500 \\ 3 & 1 & 2 & 2350 \\ 2 & 4 & 1 & 2600 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1200 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3/2 & 3/2 & 1500 \\ 1 & 2 & 2350 \\ 4 & 1 & 2600 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2350 \\ 4 & 1 & 2600 \\ 1 & 1/2 & 1200 \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{7} \begin{vmatrix} 13 & 3975 \\ \frac{5}{2} & -2150 \end{vmatrix} = \frac{10825}{2}$$

4) Mencari solusi penyelesaian sistem persamaan linear yaitu nilai dari x_1, x_2, x_3 dan x_4.

a) Menentukan solusi untuk x_1

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-\frac{8675}{2}}{-\frac{5}{4}} = \frac{34700}{10} = 3470$$

b) Menentukan solusi untuk x_2

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-\frac{1325}{2}}{-\frac{5}{4}} = \frac{5300}{10} = 530$$

c) Menentukan solusi untuk x_3

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-2750}{-\frac{5}{4}} = \frac{11000}{5} = 2200$$

d) Menentukan solusi untuk x_4

$$x_4 = \frac{\det(A_4)}{\det(A)} = \frac{\frac{10825}{2}}{-\frac{5}{4}} = -\frac{43300}{10} = -4330$$

Jadi, banyaknya masing-masing produk yang akan diproduksi adalah produk 1 $= 3470$ unit, produk 2 $= 530$ unit, produk 3 $= 2200$ dan produk 4 $= 4330$ unit.

B. Pembahasan

1. Perbandingan Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dengan Menggunakan Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer.

Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer yang telah digunakan dalam dalam menyelesaikan sistem persamaan linear orde $n \times n$ yaitu $n = 6$ selanjutnya akan dianalisis dan dibandingkan untuk mendapatkan metode yang lebih efektif. Perbandingan ini dapat dilihat dari banyaknya langkah penyelesaian, kecepatan dan ketepatan mendapatkan solusi dari sistem persamaan linear.

a. Banyaknya Langkah Penyelesaian

Dari segi banyaknya langkah penyelesaian, akan diuraikan dari masing-masing metode sistem persamaan linear, yaitu metode eliminasi gauss dan aturan cramer diatas sebagai berikut:

Pada metode eliminasi gauss memerlukan 2 langkah untuk memperoleh solusi sistem yaitu langkah pertama 5 kali operasi baris elementer sehingga terbentuk matriks segitiga atas, dan langkah kedua subtitusi balik sehingga diperoleh solusi sistem persamaan linear.

Pada aturan cramer diperlukan metode untuk menentukan determinan suatu matriks $n \times n$ dimana $n > 3$. Pada penelitian ini peneliti menggunakan metode salihu untuk menentukan determinan matriks 6×6 sedemikian sehingga pada aturan cramer ada 7 bentuk matriks yang akan ditentukan determinannya. Proses tersebut dapat dilihat pada contoh soal 4.1.2, yang dimana setiap matriks yang akan ditentukan determinannya, akan ditentukan terlebih dahulu determinan interior dan determinan uniknya. Dengan nilai determinan interior dan determinan unik yang telah ada maka determinan dari matriks $A, A_1, A_2\, A_3, A_4, A_5$ dan A_6 dapat diperoleh. Jadi, pada aturan cramer memerlukan 3 langkah untuk memperoleh solusi sistem yaitu langkah pertama menentukan matriks $A, A_1, A_2\, A_3, A_4, A_5$ dan A_6 yang sebelumnya terdapat bentuk matrik dari suatu sistem linear $Ax = B$. Langkah kedua menetukan determinan matriks A dengan metode salihu, dimana dalam metode salihu terdapat determinan interior dan determinan unik yang terlebih dahulu ditentukan nilainya untuk memperoleh determinan dari matriks A. Langkah kedua tersebut berlaku untuk matriks $A_1, A_2\, A_3, A_4, A_5$ dan A_6. Dan langkah ketiga mencari solusi sistem persamaan linear. Dari 3 langkah penyelesaian aturan cramer, proses tersebut akan diulang sebanyak 7 kali. Hal ini jelas bahwa aturan cramer memiliki jumlah penyelesaian yang tidak sedikit. Jadi, dapat disimpulkan bahwa dari segi banyaknya langkah penyelesaian metode eliminasi gauss lebih efektif dibandingkan dengan aturan cramer, dimana eliminasi gauss memerlukan 2 langkah penyelesaian sedangkan aturan cramer memerlukan 3 langkah penyelesaian yang diulang sebanyak 7 kali sesuai dengan benyaknya orde dari matriks.

b. Kecepatan

Dari segi kecepatan dalam menyelesaikan sistem persamaan linear, metode eliminasi gauss lebih cepat, hal ini disebabkan karena dalam penyelesaiannya tahap yang dilalui atau banyaknya langkah penyelesaian tidak terlalu banyak, yaitu 5 kali proses operasi baris elementer untuk memperoleh matriks segtiga atas dan subtitusi balik untuk memperoleh solusi dari sistem persamaan linear.

Pada Aturan Cramer memerlukan perhitungan beberapa determinan dari beberapa bentuk matriks maka jumlah operasi yang diperlukan oleh aturan cramer sangat besar. Adapun tahapan dalam menyelesaikan sistem persamaan linear pada aturan cramer yaitu menentukan matriks $A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ dan A_6, mencari nilai determinan $A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ dan A_6 dimana dalam mencari nilai determinannya jumlah operasi aritmatikanya cukup banyak, operasi pembagian untuk setiap matriks A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 dan A_6 sehingga diperoleh solusi dari sistem persamaan linear. Jadi, dari segi kecepatan aturan cramer akan lebih lambat jika dibandingkan dengan metode eliminasi gauss.

c. Ketepatan

Dari segi ketepatan metode eliminasi gauss lebih baik dari pada aturan cramer, hal ini disebabkan karena dalam menyelesaikan sistem persamaan linear tahapan eliminasi gauss lebih singkat, sehingga untuk memperoleh hasil yang lebih tepat akan lebih besar. Sedangkan pada aturan cramer tahapannya agak lebih panjang, sehingga kemungkinan adanya kesalahan dalam proses pengerjaannya mungkin saja terjadi dan hasil yang diperoleh kurang tepat akan lebih besar.

2. Aplikasi Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dalam bidang Ekonomi (*Product Mix Problem*)

Pada penelitian sebelumnya telah dibahas aplikasi matematika dalam bidang ekonomi khususnya analisis input-output. Aplikasi matematika khususnya dalam menyelesaikan sistem persamaan linear banyak digunakan pada bidang ilmu lainnya, seperti bidang fisika, kimia, teknik informatika, dll. Pada penelitian kali ini, peneliti akan membahas aplikasi sistem persamaan linear dibidang ekonomi khususnya *Product Mix Problem* dalam menentukan jumlah produksi suatu produk.

Pada contoh soal 4.2.1 telah diberikan suatu masalah bauran produk dimana soal tersebut akan diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi gauss dan aturan cramer. Dalam menyelesaikan soal tersebut terlebih dahulu akan dibuat tabel *product mix problem* untuk memudahkan dalam menentukan sistem persamaan linearnya. Selanjutnya akan dibentuk kedalam matriks, sehingga dapat diselesaikan dengan kedua metode yang telah dibahas sebelumnya.

Pada penyelesaian menggunakan metode eliminasi gauss, metode ini lebih efektif dan efisien dalam menentukan jumlah produksi suatu produk, hal ini dikarenakan langkah-langkah yang diperlukan hanya sedikit, yaitu hanya memerlukan 2 tahapan. Tahap pertama 3 kali operasi baris elementer untuk memperoleh matriks segitiga atas, dan tahap kedua subtitusi balik untuk memperoleh solusi sistem persamaan linear atau jumlah produksi .

Untuk penyelesaian menggunakan aturan cramer terlihat rumit dan tidak sederhana, hal ini dikarenakan langkah-langkah penyelesaiannya terlalu panjang dan membutuhkan jumlah operasi yang banyak.

Dari pembahasan diatas, dapat disimpulkan bahwa untuk memperoleh jumlah produksi suatu produk dengan matriks berukuran kecil maupun besar, metode eliminasi gauss lebih efektif dan efisien dibandingkan aturan cramer. Dalam pengaplikasiannya metode eliminasi gauss lebih mudah karena dapat menyelesaikan sistem persamaan linear yang berorde $m \times n$. Selain itu, ternyata matriks dan sistem persamaan linear sangat bermanfaat dalam bidang ekonomi. Ini dibuktikan dari penggunaan metode eliminasi gauss dan aturan cramer yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan *product mix problem* dalam menentukan jumlah produksi.

BAB V
PENUTUP

A. *Kesimpulan*

Berdasarkan dari hasil penelitian, dapat disimpulkan bahwa:

1. Metode Eliminasi Gauss lebih efektif dibanding dengan Aturan Cramer. Perbandingan ini dapat dilihat dari :
   a. Banyaknya langkah penyelesaian metode eliminasi gauss lebih efektif dibandingkan dengan aturan cramer, dimana eliminasi gauss memerlukan 2 langkah penyelesaian sedangkan aturan cramer memerlukan 3 langkah penyelesaian yang diulang sebanyak 7 kali sesuai dengan benyaknya orde dari matriks.
   b. Segi kecepatan eliminasi gauss lebih cepat, hal ini disebabkan karena dalam penyelesaiannya tahap yang dilalui atau banyaknya langkah penyelesaian tidak terlalu banyak sedangkan pada aturan cramer memerlukan perhitungan beberapa determinan dari beberapa bentuk matriks, sehingga akan lebih lambat dan,
   c. segi ketepatan eliminasi gauss lebih singkat, sehingga untuk memperoleh hasil yang lebih tepat akan lebih besar sedangkan pada aturan cramer tahapannya agak lebih panjang, sehingga kemungkinan adanya kesalahan dalam proses pengerjaannya mungkin saja terjadi dan hasil yang diperoleh kurang tepat akan lebih besar.
2. Dalam menentukan jumlah produksi pada Bidang Ekonomi khususnya dalam *Product Mix Problem* penerapan Metode Eliminasi Gauss lebih

efektif dibanding dengan Aturan Cramer karena langkah-langkah yang diperlukan hanya sedikit sedangkan untuk aturan cramer langkah-langkah penyelesaiannya terlalu panjang dan membutuhkan jumlah operasi yang banyak.

B. *Saran*

Adapun saran yang dapat peneliti sampaikan yaitu agar dalam peyelesaian sistem persamaan linear gunakan metode yang lebih efektif agar tingkat kesalahan lebih kecil. Ada begitu banyak aplikasi dalam menyelesaikan sistem persamaan linear, misalnya aplikasi dalam bidang fisika, kimia, teknik informatika, dll. Peneliti mengharapkan adanya penelitian tentang aplikasi dalam menyelesaikan sistem persamaan linear di bidang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Maragi, Ahmad Mustafa. 1993. *Tafsir Al-Maragi*. Semarang: CV Toha Putra.

Al-Mubarakfuri, Syaikh Shafiyurrahman. 2011. *Shahih Tafsr Ibnu Katsir*. Jakarta: Pustaka Ibnu Katsir.

Andrianto, Heri. 2006. *Menguasai Matriks dan Vektor*. Bandung: Rekayasa Sains.

Anton, Howard. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Bahota, Andi, dkk. *Menghitung Determinan Matriks $n \times n$ $(n \geq 3)$ dengan Menggunakan Metode Salihu* , JOM FMIPA Volume 1. No. 02, Oktober (2014).

BSW, Pudjiastuti. 2006. *MATRIKS-Teori dan Aplikas*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Depertemen Agama RI. 2010. *Al-Qur'an dan Tafsirnya.* Jakarta: Lentera Abadi.

Fathani, Abdul Halim. 2011. *Mukjizat Angka di dalam Al-Qur'an*. Jakarta: QultumMedia.

Hadley, G. 1983. *Aljabar Linear*. Jakarta: Erlangga.

Kartono. 2005. *Aljabar Linear, Vektor dan Ekplorasinya dengan Maple*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Krisnawati. 2009. *Studi Kasus terhadap Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dengan Eliminasi Gauss*, Jurnal Dasi: 1411-3201.

Kusumawati, Ririen. 2009. *Aljabar Linear & Matriks*. Malang: UIN-Malang Press.

Leon, Steven J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Jakarta: Erlangga.

Munir, Renaldi. 2008. *Metode Numerik Revisi Kedua*. Bandung: Informatika.

Pujiyanta, Ardi. 2007. *Komputasi Numerik dengan Matlab*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Purwanto, Heri, dkk. 2005. *Aljabar Linear*. Jakarta: PT. Ercontara Rajawali.

Rahman, Hairur. 2007. *Indahnya Matematika dalam Al-Quran*. Malang: UIN-Malang Press.

Rorres. 2004. *Aljabar Linear Elementer dan Aplikasinya*. Jakarta: Erlangga.

Santi, Rina CN. 2012. *Implementasi Sistem Persamaan Linear menggunakan Metode Aturan Cramer*, Jurnal Teknologi Informasi DINAMIK Volume 17, No. 1: 34-38.

Santoso, R. Gunawan. 2009. *Aljabar Linear Dasar*. Yogyakarta: ANDI.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Mishbah*. Jakarta: Lentera Hati.

Supangat, Andi. 2011. *Matematika untuk Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Kencana.

LAMPIRAN

1. Contoh 4.1.1 matriks orde 4×4

Selesaikan sistem persamaan linear berikut!

$$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 8$$

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 7$$

$$3x_1 \qquad + 4x_3 + 2x_4 = 10$$

$$4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 12$$

a. Metode Eliminasi Gauss

1) Menentukan matriks A dari sistem persamaan linear di atas.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & -2 & 8 \\ 1 & -3 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 4 & -2 & -3 & 12 \end{bmatrix}$$

2) Entri tidak nol dalam baris pertama kolom pertama dijadikan satu.

Untuk baris pertama: baris pertama dikalikan $\frac{1}{2}$. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 4 & -2 & -3 & 12 \end{bmatrix}$$

3) Entri di bawah baris pertama kolom pertama dibuat nol.

Untuk baris kedua: baris pertama dikalikan -1 kemudian ditambahkan baris kedua.

Untuk baris ketiga: baris pertama dikalikan -3 kemudian ditambahkan baris ketiga. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -3 & 12 \end{bmatrix}$$

4) Entri tidak nol dalam baris kedua kolom kedua dijadikan satu.

Untuk baris kedua: baris kedua dikalikan $-\frac{1}{6}$. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/3 & -1/2 \\ 0 & -9 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -3 & 12 \end{bmatrix}$$

5) Entri di bawah baris kedua kolom kedua dibuat nol.

Untuk baris ketiga: baris kedua dikalikan 9 kemudian ditambahkan baris ketiga.

Untuk baris keempat: baris kedua dikalikan -4 kemudian ditambahkan baris keempat. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/3 & -1/2 \\ 0 & 0 & -13/2 & 2 & -13/2 \\ 0 & 0 & 0 & -5/3 & 14 \end{bmatrix}$$

6) Entri tidak nol dalam baris ketiga kolom ketiga dijadikan satu.

Untuk baris ketiga: baris ketiga dikalikan $-\frac{2}{13}$. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -4/13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5/3 & 14 \end{bmatrix}$$

7) Entri tidak nol dalam baris keempat kolom keempat dijadikan satu.

Untuk baris keempat: baris keempat dikalikan $-\frac{3}{5}$. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -4/13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -42/5 \end{bmatrix}$$

8) Matriks di atas sudah dalam bentuk matriks segitiga atas, sehingga diperoleh sistem persamaan linear berikut:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4$$

$$x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = -\frac{1}{2}$$

$$x_3 - \frac{4}{13}x_4 = 1$$

$$x_4 = -\frac{42}{5}$$

9) Melakukan subtitusi balik untuk memperoleh solusi sistem persamaan linear.

$$x_1 = \frac{718}{65}$$

$$x_2 = -\frac{266}{65}$$

$$x_3 = -\frac{103}{65}$$

$$x_4 = -\frac{42}{5}$$

Jadi, solusi sistem persamaan linear di atas adalah $\left(\frac{718}{65}, -\frac{266}{65}, -\frac{103}{65}, -\frac{42}{5}\right)$

b. Aturan Cramer

1) Menentukan matriks A, x dan B dari sistem persamaan linear di atas.

$$Ax = B$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}$$

2) Menentukan matriks A_1, A_2, A_3 dan A_4.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & -2 \\ 7 & -3 & 5 & 1 \\ 10 & 0 & 4 & 2 \\ 12 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 & -2 \\ 1 & 7 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 2 \\ 0 & 12 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & -2 \\ 1 & -3 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & 12 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 4 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

3) Menentukan determinan matriks A, A_1, A_2, A_3 dan A_4 dengan metode salihu.

a) Menentukan determinan matriks A.

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 4 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{12}\begin{vmatrix} 78 & 84 \\ 26 & 48 \end{vmatrix} = -\frac{1}{12}(3744 - 2184) = -130$$

b) Menentukan determinan matriks A_1

$$\det(A_1) = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & -2 \\ 7 & -3 & 5 & 1 \\ 10 & 0 & 4 & 2 \\ 12 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 7 & -3 & 5 \\ 10 & 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 4 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 10 & 0 & 4 \\ 12 & 4 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{12}\begin{vmatrix} 156 & 84 \\ -116 & 48 \end{vmatrix} = -\frac{1}{12}(7488 + 9744) = -1436$$

c) Menentukan determinan matriks A_2

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 & -2 \\ 1 & 7 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 2 \\ 0 & 12 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 7 & 5 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 8 & 4 & -2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 10 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 10 & 4 \\ 0 & 12 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 10 & 4 & 2 \\ 12 & -2 & -3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{22}\begin{vmatrix} 0 & 76 \\ 154 & 146 \end{vmatrix} = -\frac{1}{22}(0 - 11704) = 532$$

d) Menentukan determinan matriks A_3

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & -2 \\ 1 & -3 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & 12 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 7 \\ 3 & 0 & 10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 8 & -2 \\ -3 & 7 & 1 \\ 0 & 10 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 3 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 7 & 1 \\ 0 & 10 & 2 \\ 4 & 12 & -3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{30}\begin{vmatrix} 78 & 132 \\ 152 & 178 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30}(13884 - 20064) = 206$$

e) Menentukan determinan matriks A_4

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 4 & -2 & 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 4 & 8 \\ -3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 10 \\ 4 & -2 & 12 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{12}\begin{vmatrix} 78 & 156 \\ 26 & -116 \end{vmatrix} = -\frac{1}{12}(-9048 - 4056) = 1092$$

4) Mencari solusi penyelesaian sistem persamaan linear yaitu nilai dari x_1, x_2, x_3 dan x_4.

a) Menentukan solusi untuk x_1

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det A} = \frac{-1436}{-130} = \frac{718}{65}$$

b) Menentukan solusi untuk x_2

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det A} = \frac{532}{-130} = -\frac{266}{65}$$

c) Menentukan solusi untuk x_3

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det A} = \frac{206}{-130} = -\frac{103}{65}$$

d) Menentukan solusi untuk x_4

$$x_4 = \frac{\det(A_4)}{\det A} = \frac{1092}{-130} = -\frac{42}{5}$$

Jadi, solusi sistem persamaan linear di atas adalah $\left(\frac{718}{65}, -\frac{266}{65}, -\frac{103}{65}, -\frac{42}{5}\right)$.

2. Contoh 4.1.2 matriks orde 5×5

Selesaikan sistem persamaan linear berikut!

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 17$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 7$$
$$3x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 12$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 3$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 = -1$$

a. Metode Eliminasi Gauss

1) Menentukan matriks A dari sistem persamaan linear di atas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 17 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2) Karena entri baris pertama kolom pertama adalah satu, maka selanjutnya di bawah baris pertama kolom pertama dibua nol.

Untuk baris kedua: baris pertama dikalikan -2 kemudian ditambahkan baris kedua.

Untuk baris keempat: baris pertama dikalikan -1 kemudian ditambahkan baris keempat.

Untuk baris kelima: baris pertama dikalikan -2 kemudian ditambahkan baris kelima. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & -2 & -3 & -6 & 1 & -27 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 & -14 \\ 0 & -3 & -4 & -7 & 2 & -35 \end{bmatrix}$$

3) Entri tidak nol dalam baris kedua kolom kedua dijadikan satu.

Untuk baris kedua: baris kedua dikalikan $-\frac{1}{2}$. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3 & -1/2 & 27/2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 & -14 \\ 0 & -3 & -4 & -7 & 2 & -35 \end{bmatrix}$$

4) Entri di bawah baris kedua kolom kedua dibuat nol.

Untuk baris ketiga: baris kedua dikalikan -3 kemudian ditambahkan baris ketiga.

Untuk baris kelima: baris kedua dikalikan 3 kemudian ditambahkan baris kelima. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3 & -1/2 & 27/2 \\ 0 & 0 & -7/2 & -6 & 7/2 & -57/2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2 & 1/2 & 11/2 \end{bmatrix}$$

5) Entri tidak nol dalam baris ketiga kolom ketiga dijadikan satu.

Untuk baris ketiga: baris ketiga dikalikan $-\frac{2}{7}$. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3 & -1/2 & 27/2 \\ 0 & 0 & 1 & 12/7 & -1 & 57/7 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2 & 1/2 & 11/2 \end{bmatrix}$$

6) Entri di bawah baris ketiga kolom ketiga dibuat nol.

Untuk baris keempat: baris ketiga dikalikan 1 kemudian ditambahkan baris keempat.

Untuk baris kelima: baris ketiga dikalikan $-\frac{1}{2}$ kemudian ditambahkan baris kelima. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3 & -1/2 & 27/2 \\ 0 & 0 & 1 & 12/7 & -1 & 57/7 \\ 0 & 0 & 0 & -9/7 & 1 & -41/7 \\ 0 & 0 & 0 & 8/7 & 1 & 10/7 \end{bmatrix}$$

7) Entri tidak nol dalam baris keempat kolom keempat dijadikan satu.

Untuk baris keempat: baris keempat dikalikan $-\frac{7}{9}$. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3 & -1/2 & 27/2 \\ 0 & 0 & 1 & 12/7 & -1 & 57/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/9 & 41/9 \\ 0 & 0 & 0 & 8/7 & 1 & 10/7 \end{bmatrix}$$

8) Entri di bawah baris keempat kolom keempat dibuat nol.

Untuk baris kelima: baris keempat dikalikan $-\frac{8}{7}$ kemudian ditambahkan baris kelima. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3 & -1/2 & 27/2 \\ 0 & 0 & 1 & 12/7 & -1 & 57/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/9 & 41/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17/9 & -34/9 \end{bmatrix}$$

9) Entri tidak nol dalam baris kelima kolom kelima dijadikan satu.

Untuk baris kelima: baris kelima dikalikan $\frac{9}{17}$. Sehingga matriks menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3 & -1/2 & 27/2 \\ 0 & 0 & 1 & 12/7 & -1 & 57/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/9 & 41/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -34/17 \end{bmatrix}$$

10) Matriks di atas sudah dalam bentuk matriks segitiga atas, sehingga diperoleh sistem persamaan linear berikut:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 17$$

$$x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 3x_4 - \frac{1}{2}x_5 = \frac{27}{2}$$

$$x_3 + \frac{12}{7}x_4 - x_5 = \frac{57}{7}$$

$$x_4 - \frac{7}{9}x_5 = \frac{41}{9}$$

$$x_5 = -2$$

11) Melakukan subtitusi balik untuk memperoleh solusi sistem persamaan linear.

$x_1 = -1$

$x_2 = 2$

$x_3 = 1$

$x_4 = 3$

$x_5 = -2$

Jadi, solusi sistem persamaan linear di atas adalah $(-1, 2, 1, 3, -2)$

b. Aturan Cramer

1) Menentukan matriks A, x dan B dari sistem persamaan linear di atas.

$$Ax = B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 7 \\ 12 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2) Menentukan matriks A_1, A_2, A_3, A_4 dan A_5.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 17 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 7 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 17 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 12 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 17 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 12 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 17 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 12 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 17 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3) Menentukan determinan matriks A, A_1, A_2, A_3, A_4 dan A_5 dengan metode salihu.

a) Menentukan determinan matriks A.

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

1) Menentukan determinan interior

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2 + 6 + 6) - (4 + 6 + 3) = 14 - 13 = 1$$

2) Menentukan determinan unik

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = -\frac{1}{1} \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(7 + 2) = -9$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-4+2) = -2$$

$$|E| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1-3) = -4$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(-4+2) = 1$$

Jadi, $\det A = \frac{1}{|B|} \begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} -9 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = (-9-8) = -17$

b) Menentukan determinan matriks A_1

$$\det(A_1) = \begin{bmatrix} 17 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 7 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 17 & 2 & 2 & 4 \\ 7 & 2 & 1 & 2 \\ 12 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 2 \\ 12 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

1) Menentukan determinan interior

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2+6+6)-(4+6+3) = 14-13 = 1$$

2) Menentukan determinan unik

$$|C| = \begin{vmatrix} 17 & 2 & 2 & 4 \\ 7 & 2 & 1 & 2 \\ 12 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 17 & 2 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \\ 12 & 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 12 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = -\frac{1}{1} \begin{vmatrix} -13 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(-13+8) = 5$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-4 + 2) = -2$$

$$|E| = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 2 \\ 12 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 12 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -10 & -1 \end{vmatrix} = (-4 + 10) = 6$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(-4 + 2) = 1$$

Jadi, $\det A_1 = \frac{1}{|B|} \begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (5 + 12) = 17$

c) Menentukan determinan matriks A_2

$$\det(A_2)=\begin{bmatrix}1&17&2&4&0\\2&7&1&2&1\\0&12&1&3&2\\1&3&1&1&2\\2&-1&0&1&2\end{bmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix}7&1&2\\12&1&3\\3&1&1\end{vmatrix}}\begin{Vmatrix}\begin{vmatrix}1&17&2&4\\2&7&1&2\\0&12&1&3\\1&3&1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}17&2&4&0\\7&1&2&1\\12&1&3&2\\3&1&1&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&7&1&2\\0&12&1&3\\1&3&1&1\\2&-1&0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}7&1&2&1\\12&1&3&2\\3&1&1&2\\-1&0&1&2\end{vmatrix}\end{Vmatrix}$$

1) Menentukan determinan interior

$$|B|=\begin{vmatrix}7&1&2\\12&1&3\\3&1&1\end{vmatrix}=(7+9+24)-(6+21+12)=40-39=1$$

2) Menentukan determinan unik

$$|C|=\begin{vmatrix}1&17&2&4\\2&7&1&2\\0&12&1&3\\1&3&1&1\end{vmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix}7&1\\12&1\end{vmatrix}}\begin{Vmatrix}\begin{vmatrix}1&17&2\\2&7&1\\0&12&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}17&2&4\\7&1&2\\12&1&3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&7&1\\0&12&1\\1&3&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}7&1&2\\12&1&3\\3&1&1\end{vmatrix}\end{Vmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{vmatrix}9&3\\13&1\end{vmatrix}=-\frac{1}{5}(9-39)=6$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 17 & 2 & 4 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 17 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 2 \\ 12 & 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 12 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (6 + 2) = 8$$

$$|E| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 12 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 12 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 12 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 12 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 17 & 11 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(143 - 17) = 14$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 12 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 12 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 11 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(-4 - 22) = 13$$

Jadi, $\det A_2 = \frac{1}{|B|} \begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 14 & 13 \end{vmatrix} = (78 - 112) = -34$

d) Menentukan determinan matriks A_3

$$\det(A_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 17 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 12 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 3 & 12 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 17 & 4 \\ 2 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 12 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 17 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 12 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 12 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 12 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

1) Menentukan determinan interior

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 3 & 12 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (24 + 42 + 18) - (48 + 18 + 21) = 84 - 87 = -3$$

2) Menentukan determinan unik

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 17 & 4 \\ 2 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 12 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 17 \\ 2 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 12 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 17 & 4 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 12 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 3 & 12 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 57 & 6 \\ -27 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(-171 + 162) = -3$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 17 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 12 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 12 & 3 \end{vmatrix}} \left\| \begin{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 17 & 4 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 12 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 17 & 4 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ 12 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 3 & 12 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 12 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{matrix} \right\| = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}(-30 + 27) = 1$$

$$|E| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 12 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} \left\| \begin{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 3 & 12 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 12 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix} \right\| = -\frac{1}{15} \begin{vmatrix} -27 & -3 \\ -15 & -15 \end{vmatrix} = -\frac{1}{15}(360) = -24$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 12 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} \left\| \begin{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 3 & 12 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 12 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 12 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 12 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -15 & -16 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(48 - 75) = -9$$

Jadi, $\det A_3 = \frac{1}{|B|} \begin{Vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{Vmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -24 & -9 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}(27 + 24) = -17$

e) Menentukan determinan matriks A_4

$$\det(A_4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 17 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 12 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 17 \\ 2 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 17 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 12 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 12 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

1) Menentukan determinan interior

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (6 + 24 + 21) - (14 + 24 + 9) = 51 - 47 = 4$$

2) Menentukan determinan unik

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 17 \\ 2 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 & 17 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = -\frac{1}{1} \begin{vmatrix} 7 & -13 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(28 + 13) = -41$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 17 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 12 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 12 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 17 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 17 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 12 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 12 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} -13 & -13 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}(-117 + 52) = -13$$

$$|E| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -10 \end{vmatrix} = (-10 - 12) = -22$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 12 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 12 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 12 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -10 & -18 \end{vmatrix} = -\frac{1}{9}(-72 + 90) = -2$$

Jadi, $\det A_3 = \frac{1}{|B|} \begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -41 & -13 \\ -22 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(82 - 286) = -51$

f) Menentukan determinan matriks A_5

$$\det(A_5)=\begin{bmatrix}1&2&2&4&17\\2&2&1&2&7\\0&3&1&3&12\\1&2&1&1&3\\2&1&0&1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix}2&1&2\\3&1&3\\2&1&1\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&2&4\\2&2&1&2\\0&3&1&3\\1&2&1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&2&4&17\\2&1&2&7\\3&1&3&12\\2&1&1&3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&2&1&2\\0&3&1&3\\1&2&1&1\\2&1&0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1&2&7\\3&1&3&12\\2&1&1&3\\1&0&1&-1\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

1) Menentukan determinan interior

$$|B|=\begin{vmatrix}2&1&2\\3&1&3\\2&1&1\end{vmatrix}=(2+6+6)-(4+6+3)=14-13=1$$

2) Menentukan determinan unik

$$|C|=\begin{vmatrix}1&2&2&4\\2&2&1&2\\0&3&1&3\\1&2&1&1\end{vmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}1&2&2\\2&2&1\\0&3&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&2&4\\2&1&2\\3&1&3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&2&1\\0&3&1\\1&2&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1&2\\3&1&3\\2&1&1\end{vmatrix}\end{vmatrix}=-\frac{1}{1}\begin{vmatrix}7&-2\\1&1\end{vmatrix}=-(7+2)=-9$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 17 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 & 17 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 12 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 12 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2 - 3) = -5$$

$$|E| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1 - 3) = -4$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 12 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(11 + 1) = -6$$

Jadi, $\det A_3 = \frac{1}{|B|} \begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} -9 & -5 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = (54 - 20) = 34$

4) Mencari solusi penyelesaian sistem persamaan linear yaitu nilai dari x_1, x_2, x_3 dan x_4.

a) Menentukan solusi untuk x_1

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det A} = \frac{17}{-17} = -1$$

b) Menentukan solusi untuk x_2

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det A} = \frac{-34}{-17} = -2$$

c) Menentukan solusi untuk x_3

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det A} = \frac{-17}{-17} = 1$$

d) Menentukan solusi untuk x_4

$$x_4 = \frac{\det(A_4)}{\det A} = \frac{-51}{-17} = 3$$

e) Menentukan solusi untuk x_5

$$x_5 = \frac{\det(A_5)}{\det A} = \frac{34}{-17} = -2$$

Jadi, solusi sistem persamaan linear di atas adalah $(-1, 2, 1, 3, -2)$

RIWAYAT HIDUP PENULIS

KASRINA KAMALUDDIN, lahir pada hari Rabu, tanggal 11 November 1992, di Pekkabata, Kec. Duampanua, Kab. Pinrang. Anak pertama dari tiga bersaudara. Buah hati dari pasangan Kamaluddin dan Rusmini yang menikah pada tahun 1991.

RIWAYAT PENDIDIKAN

1. SDN 28 Pekkabata di kel. Pekkabata, Kec. Duampanua, kab. Pinrang pada tahun 1999-2005.
2. SMPN 1 Duampanua di Pekkabata, Kec. Duampanua, kab. Pinrang pada tahun 2005-2008
3. SMAN 1 Duampanua di Pekkabata, Kec. Duampanua, kab. Pinrang pada tahun 2008-2011.
4. Tahun 2011 penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi Negeri jenjang S-1 di Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar pada Fakultas Sains dan Teknologi, Jurusan Matematika.

Atas Rahmat Allah swt. penulis berhasil menyelesaikan studi di tahun 2015 dengan judul Skripsi **“Analisis Metode Eliminasi Gauss dan Aturan Cramer dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear serta Aplikasinya”.**